

EXEMPLE N°1 Soit (u_n) la suite définie par la donnée de u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$.
Donner l'expression du terme général u_n de cette suite en commençant par rechercher une conjecture sur les premiers termes.

On calcule les premiers termes :

$$u_1 = \frac{u_0}{u_0 + 2}, u_2 = \frac{u_0}{\frac{u_0+2}{u_0+2} + 2} = \frac{u_0}{\frac{3u_0+4}{u_0+2} + 2} = \frac{u_0}{\frac{3u_0+4}{u_0+2} + \frac{2(u_0+2)}{u_0+2}} = \frac{u_0}{\frac{3u_0+4+2u_0+4}{u_0+2}} = \frac{u_0}{\frac{5u_0+8}{u_0+2}} = \frac{u_0(u_0+2)}{5u_0+8} \dots$$

Prouvons le par récurrence simple avec l'hypothèse de récurrence à l'ordre n entier donnée par :

$$\text{HR}_n : u_n = \frac{u_0}{(2^n - 1)u_0 + 2^n}$$

Initialisation : Pour $n = 0$, $\frac{u_0}{(2^0 - 1)u_0 + 2^0} = \frac{u_0}{0 \times u_0 + 1} = u_0$ donc HR_0 est vraie.

Hérédité On prouve que $\text{HR}_n \Rightarrow \text{HR}_{n+1}$ aussi on suppose HR_n vraie et on prouve qu'alors HR_{n+1} est aussi vraie.

$$\text{Or} : u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2} = \frac{\frac{u_0}{(2^n - 1)u_0 + 2^n}}{\frac{u_0}{(2^n - 1)u_0 + 2^n} + 2} = \frac{u_0}{u_0 + 2((2^n - 1)u_0 + 2^n)} = \frac{u_0}{(2^{n+1} - 1)u_0 + 2^{n+1}}$$

Conclusion : Par principe de récurrence simple, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{u_0}{(2^n - 1)u_0 + 2^n}$.

EXEMPLE N°2 On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$
Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que la suite est strictement croissante.

Il s'agit de justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$

Soit l'hypothèse de récurrence à l'ordre n entier donné par $\text{HR}_n : \ll u_{n+1} < u_n \gg$

Initialisation On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \approx 1,41$ aussi $u_1 > u_0$ et HR_0 est vraie

Hérédité : On prouve $\text{HR}_n \Rightarrow \text{HR}_{n+1}$. Aussi, on suppose que $u_{n+1} < u_n$ et on montre que $u_{n+2} < u_{n+1}$

Or : $u_{n+1} < u_n \Rightarrow 1 + u_{n+1} < 1 + u_n \Rightarrow \underbrace{\sqrt{1 + u_{n+1}}}_{u_{n+2}} < \underbrace{\sqrt{1 + u_n}}_{u_{n+1}}$ par croissance de la racine

Ainsi, on a $u_{n+2} < u_{n+1}$ autrement dit HR_{n+2} est vérifiée.

Conclusion : Par récurrence simple, on a justifié que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ autrement dit que (u_n) est strictement croissante.

EXEMPLE N°3 Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n)$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq n!$.

Soit l'hypothèse HR_n de récurrence pour sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ donné par $\text{HR}_n \ll u_n \leq n! \gg$
Montrons que HR_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par une récurrence double sur n :

Initialisation : $u_1 = 1 \leq 1!$ et $u_2 = 1 \leq 2!$ donc HR_1 et HR_2 sont vraies.

Hérédité : On prouve : $\begin{cases} \text{HR}_n \\ \text{HR}_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \text{HR}_{n+2}$ aussi on suppose HR_n et HR_{n+1} vraies pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on prouve que HR_{n+2} l'est aussi. On sait que :

$$u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n) \leq n(n+1)! + n! = n((n+1) \times n! + n!) = (n(n+1) + n)n! = (n^2 + 2n)n!$$

Il s'agit donc de comparer $(n^2 + 2n)$ avec $(n+2)(n+1)$ avec $(n+2)(n+1) > n^2 + 2n$ vu que $n \in \mathbb{N}$ donc $u_{n+2} \leq (n+2)(n+1)n! = (n+2)!$.
Or $(n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2 = n^2 + 2n + \underbrace{n+2}_{>0} > n^2 + 2n$

Ainsi HR_{n+2} est bien vérifiée.

Conclusion : Par récurrence double, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq n!$.

EXEMPLE N°4 Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

Soit l'hypothèse de récurrence à l'ordre n donnée par $\text{HR}_n : \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

Initialisation : Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\sum_{k=1}^1 \frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ donc HR_1 est vraie

Hérédité On prouve que $\text{HR}_n \Rightarrow \text{HR}_{n+1}$ aussi on suppose HR_n vraie et on prouve qu'alors HR_{n+1} est aussi vraie

Il s'agit donc de prouver : $\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1+k}$. Or : $\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2}$

Aussi, en utilisant HR_n et le fait que $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

On pose $k = p + 1$ dans la somme :

$$\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{n+p+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+p} + \frac{1}{n+1+n} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{2n+2}$$

Mais alors, en ajoutant puis en retranchant le terme en $p = n + 1$ manquant et en isolant le terme $p = 0$ on a :

$$\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{n+1} + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+p} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+p}$$

donc HR_{n+1} est vérifiée

Conclusion Par principe de récurrence simple, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

EXEMPLE N°5 A l'aide d'une récurrence forte (ou généralisée), démontrer que tout nombre entier $n \geq 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.
Rappel : un nombre est premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Soit l'hypothèse de récurrence à l'ordre n où $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ donnée par $\text{HR}_n : \ll n$ s'écrit comme un produit de nombre premier $\gg$

Initialisation HR_2 est vérifiée puisque 2 est un produit à un seul terme qui vaut 2 or 2 est bien un nombre premier.

Hérédité On prouve $\left(\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \text{HR}_k \text{ vraie} \right) \Rightarrow \text{HR}_{n+1}$ est vraie.

Considérons l'entier $n + 1$, il y a alors deux alternatives :

- soit $n + 1$ est un nombre premier et donc c'est un bien produit (à 1 terme) de nombre premier
- soit $n + 1$ n'est pas un nombre premier et, par définition, il s'écrit $n + 1 = k_1 \times k_2$ où $(k_1, k_2) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$ est un couple de diviseurs. En effet, $n + 1$ doit admettre un diviseur k_1 distincts de 1 et de lui-même donc dans $\llbracket 2, n \rrbracket$ et l'égalité de division $n + 1 = k_1 \times k_2$ induit que $k_2 \in \llbracket 2, n \rrbracket$ également. On peut alors utiliser les propriétés HR_{k_1} et HR_{k_2} qui permettent d'écrire k_1 et k_2 comme des produits de nombres premiers puis, en combinant avec l'égalité $n + 1 = k_1 \times k_2$, on a bien obtenu que $n + 1$ est aussi un produit de nombres premiers. Aussi, HR_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : On a justifié, par une récurrence forme, que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, HR_n est vraie donc que tout nombre entier $n \geq 2$ peut s'écrire comme un produit de nombres premiers.