Étude du cas $n=2$

On considère une matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ trigonalisable sans être diagonalisable.
On note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ canoniquement associé à A
Nécessairement : $Sp(A) = \{\lambda\}$ car sinon il y a 2 valeurs propres distinctes et A serait diagonalisable

aussi : $\chi_A(x) =$ $(x-\lambda)^2$ car c'est un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$, unitaire de degré 2 n'admettant que λ pour racine

et : $\dim E_A(\lambda) =$ 1 sinon A serait diagonalisable

Une base de trigonalisation est une base $\mathscr{B}=(u,v)$ de $\mathbb{K}^2$ avec : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 0$ car non diagonalisable

Pour u, on doit donc choisir un vecteur propre de f

Quitte à utiliser $u_1 = \alpha u$ plutôt que u comme premier vecteur de base, on aura : $\mathrm{Mat}_{(u_1,v)}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

En effet : $f(v) = \alpha u + \lambda v = 1\times u_1 + \lambda v$ et on a encore $f(u_1) = \lambda u_1$ d'où la matrice voulue dans $\mathscr{B}_1 = (u_1, v)$

EXEMPLE N° 4 Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculons le polynôme caractéristique de A: $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)(x-3)+1 = x^2-4x+4 = (x-2)^2$

Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, $\boxed{\text{la matrice A est au moins trigonalisable dans } M_2(\mathbb{R})}$
On sait que $Sp(A) = \{2\}$ et que la multiplicité de 2 est $m(2) = 1$

Comparons $m(2)$ et $\dim E_2(A)$: $E_2(A) = \mathrm{Ker}\,(A-2I_2) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ aussi, en notant C_i la colonne i,

$C_1 = C_2 \neq 0 \mathrm{rg}(A-2I_2) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(A-2I_2) = 2-1 = 1 \neq m(2) \Rightarrow$ $\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable.}}$

De plus: $\left\{\begin{array}{l} C_1 - C_2 = 0 \\ \dim E_2(A) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1,-1) \in E_2(A) \\ \dim E_2(A) = 1 \end{array}\right. \Rightarrow E_2(A) = \mathrm{Vect}\big((1,-1)\big)$

On cherche, désormais, une base $\mathscr{B} = (u,v)$ de trigonalisation de A telle que, si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ est canoniquement associé à A, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = T$ sera semblable à $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f)$ avec $\mathscr{B}_{can}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$

Par définition: $f(u) = 2u \Leftrightarrow Au = 2u \Leftrightarrow u \in E_2(A) \Leftrightarrow u = (\alpha, -\alpha)$ vu que $E_2(A) = \mathrm{Vect}\big((1,-1)\big)$

Aussi, en notant $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $f(v) = u + 2v \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y = \alpha \\ x+y = -\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow x+y = -\alpha$

Enfin: (u,v) base de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha & x \\ -\alpha & y \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha(y+x) \neq 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 \neq 0$

Conclusion: $\boxed{\text{pour } \left\{\begin{array}{l} u = (\alpha,-\alpha) \\ v = (x, -x-\alpha) \end{array}\right. \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}^* \text{ et } x \in \mathbb{R} \text{ puis } P = \begin{pmatrix} \alpha & x \\ -\alpha & -x-\alpha \end{pmatrix} \text{ vérifie } P^{-1}AP = T}$

On peut prendre,par exemple $\alpha = 1$ et $x = 0$ alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vérification: $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ car $e_1 = u - v$ et $e_2 = -v$ d'où: $P^{-1}AP = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple de trigonalisation guidée si $n=3$

EXEMPLE N° 5 Montrer que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ où λ et μ sont des réels.

Si les deux matrices sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique. $\chi_T(x) = (x-\lambda)(x-\mu)^2$

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 1 & x-5 & -3 \\ 2 & 6 & x+4 \end{vmatrix} = (x+1)\big((x-5)(x+4)+18\big) = (x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x+1)(x-2)$

On identifie donc: $\boxed{\lambda = 2,\ \mu = -1}$. Puisque χ_A est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ on sait que A est trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$
Notons f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$: $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
On cherche donc une base $\mathscr{B}' = (U,V,W)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que: $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \Leftrightarrow AU = 2U$, $AV = -V$ et $AW = V - W$
U et V sont donc des vecteurs propres de A pour les valeurs propres 2 et -1

• La valeur propre 2 est simple: $\dim \mathrm{Ker}\,(A-2I_3) = 1$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ aussi $U = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$

car $C_3 = C_2 \Leftrightarrow (0,1,-1) \in \mathrm{Ker}\,(A-2I_3)$ donc $\mathrm{Ker}\,(A-2I_3) = \mathrm{Vect}\big((0,1,-1)\big)$

• $\mathrm{rg}(A+I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim E_{-1}(A) = 3-2 = 1$ et $C_2 = 2C_3 \Leftrightarrow (0,1,-2) \in E_{-1}(A)$ d'où $V = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2\beta \end{pmatrix}$ où $\beta \in \mathbb{R}^*$

$\dim E_{-1}(A) = 1 \neq 2 = m(-1) \Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable et $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\big((0,1,-2)\big)$

• Enfin $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que:

$AW = V - W \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x = -x \\ -x+5y+3z = \beta - y \\ 2x-6y-3z = -2\beta - z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ z = -2y \\ x = -\beta \end{array}\right.$ via $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ puis substitution.

• Enfin, (U,V,W) doit être une base de $\mathbb{R}^3$ donc

$\det_{\mathscr{B}}(U,V,W) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ \alpha & \beta & y \\ -\alpha & -2\beta & -2y \end{vmatrix} = -\beta\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -2\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ Pas de condition sur y !

$\boxed{\text{Pour } U = (0,\alpha,-\alpha),\ V = (0,\beta,-2\beta) \text{ et } W = (-\beta, y, -2y) \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{array}\right.,\ \mathscr{B}' = (U,V,W) \text{ est une base de trigonalisation de A}}$

La matrice de passage est $\boxed{P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ \alpha & \beta & y \\ -\alpha & -2\beta & -2y \end{pmatrix} \text{ et on a: } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T}$

$P = P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ pour $\alpha = \beta = 1,\ y = 0$ ou $P = P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\pi \\ 42 & \pi & e \\ -42 & -2\pi & -2e \end{pmatrix}$ pour $\alpha = 42, \beta = \pi,\ y = e$ conviennent

Attention ! La forme de la trigonalisée n'est pas quelconque.

Par exemple, une trigonalisation sous la forme $T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'aboutira pas. En effet: si $W = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

avec: $AW = U - W \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x = -x \\ -x+6y+3z = \beta \\ -x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = 0 \\ z = \frac{\beta}{3} - 2y \\ x = 0 \end{array}\right.$ via $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ puis substitution.

$\det_{\mathscr{B}}(U,V,W) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & y \\ -\alpha & -2\beta & \frac{\beta}{3} - 2y \end{vmatrix} = 0$ pour toutes valeurs de α, β et y donc (U,V,W) ne sera jamais une base de $\mathbb{R}^3$