PT : TD N° 1 SUR LE CHAPITRE XIII

EXERCICE N° 1 On considère la fonction f définie par : $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\,\mathrm{d}t$

1. Justifier que f est définie pour tout x réel.

On pose $u(x,t)=e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)$ de sorte que $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}u(x,t)\,\mathrm{d}t$. On remarque que $f(-x)=f(x)$ autrement dit il suffit de justifier que l'intégrale $f(x)$ converge pour $x\geqslant 0$ pour obtenir la définition de f sur $\mathbb{R}$.
Or, u est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ donc, pour tout $x\geqslant 0$, $\left[u(x,.) : t\mapsto e^{-t^2}\operatorname{ch}(2xt)\right]$, est continue sur $\mathbb{R}$ d'où aussi sur $[0,+\infty[$. De plus : $|u(x,t)|=u(x,t)\sim_{t\to+\infty}\dfrac{1}{2}e^{-t^2}e^{2xt}$ puisque $\operatorname{ch} a\sim_{+}\dfrac{e^a}{2}$ avec $a=2xt\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$
Mais $\dfrac{|u(x,t)|}{e^{-t}}\sim\dfrac{1}{2}e^{-t^2+2xt+t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ car $-2t+2xt+t\sim_{+\infty}-t^2\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\infty$ donc $u(x,t)=_{t\to+\infty}o\left(e^{-t}\right)$
Or, $[t\mapsto e^{-t}]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc, par domination, $[t\mapsto u(x,t)]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et, par suite, $f(x)$ converge pour tout $x\geqslant 0$.
Par parité, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$ et, pour tout x réel, $[t\mapsto u(x,t)]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. Établir que f est de classe C^1 sur $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$ pour tout réel $\mathrm{A}>0$.

Il s'agit de vérifier : i) $\forall x\in[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$, $[t\mapsto u(x,t)]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$
ii) $\forall t\in[0,+\infty[$, $[x\mapsto u(x,t)]$ est de classe C^1 sur $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$
iii) $\forall x\in[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$, $\left[t\mapsto\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur $[0,+\infty[$
iv) Domination :
il existe φ_{A} continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$ avec $\forall x\in[-\mathrm{A},\mathrm{A}],\forall t\in[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi_{\mathrm{A}}(t)$

i) a été démontrée dans la question 1. Il est clair que, par les théorèmes usuels, u est de classe C^1 sur $\mathscr{U}=\mathbb{R}^2$ (fonction de deux variables). Cela justifie les hypothèses ii), iii) en passant aux applications partielles.
On a : $\forall(x,t)\in[-\mathrm{A},\mathrm{A}]\times[0,+\infty[$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)$ d'où, en partant de la contrainte :
$$-\mathrm{A}\leqslant x\leqslant\mathrm{A}\Rightarrow_{t\geqslant0}-2\mathrm{A}t\leqslant2xt\leqslant2\mathrm{A}t\underset{\text{par croissance de sh}}{\Rightarrow}-\operatorname{sh}(2\mathrm{A}t)\leqslant\operatorname{sh}(2xt)\leqslant\operatorname{sh}(2\mathrm{A}t)\underset{\text{Pour } a>0,\ -a\leqslant x\leqslant a\Leftrightarrow|x|\leqslant a}{\Rightarrow}|\operatorname{sh}(2xt)|\leqslant\operatorname{sh}(2\mathrm{A}t)\Rightarrow\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\underbrace{\operatorname{sh}(2\mathrm{A}t)te^{-t^2}}_{=\varphi_{\mathrm{A}}(t)}$$
L'application φ_a est bien continue et positive sur $[0,+\infty[$ et : $\varphi_{\mathrm{A}}(t)\sim_{+\infty}2te^{-t^2+2\mathrm{A}t}=2e^{-t^2+2\mathrm{A}t+\ln t}$
Aussi : $e^t\varphi_{\mathrm{A}}(t)\sim_{+\infty}2e^{-t^2+(2\mathrm{A}+1)t+\ln t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ puisque $-t^2+\underbrace{(2\mathrm{A}+1)t}_{=o(t^2)}+\underbrace{\ln t}_{=o(t^2)}\sim_{+\infty}-t^2\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\infty$
Aussi : $\varphi_{\mathrm{A}}(t)=o\left(e^{-t}\right)$ et $[t\mapsto e^{-t}]$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ donc φ_{A} est intégrable sur $[0,+\infty[$ et iv) vérifiée
Puisque les hypothèses i),ii),iii), iv) sont vérifiés, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur } [-\mathrm{A},\mathrm{A}] \text{ pour tout } \mathrm{A}>0}$

3. En déduire que f est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Le caractère C^1 étant une propriété locale, on peut conclure que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}2te^{-t^2}\operatorname{sh}(2xt)\,\mathrm{d}t$ alors, par une IPP avec $\begin{cases}u'(t)=2te^{-t^2}\\ v(t)=\operatorname{sh}(2xt)\end{cases}$ d'où $\begin{cases}u(t)=-e^{-t^2}\\ v'(t)=2x\operatorname{ch}(2xt)\end{cases}$
où u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$. Puisqu'on sait que $f'(x)$ converge et aussi que
$[u(t)v(t)]_0^{+\infty}=\left[-\operatorname{sh}(2xt)e^{-t^2}\right]_0^{+\infty}=\lim\limits_{t\to+\infty}(-\operatorname{sh}(2xt)e^{-t^2})+0=0$ puisque $\operatorname{sh}(2xt)e^{-t^2}\sim_{t\to+\infty}\dfrac{1}{2}e^{-t^2+2xt}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$
L'IPP est possible : $f'(x)=0-\displaystyle\int_0^{+\infty}u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=2xf(x)$ donc $\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation } y'=2xy}$

4. Déterminer enfin $f(x)$ sans le symbole intégrale. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On résout cette équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre résolue $y'+a(x)y=0$ où $a(x)=-2x$
L'ensemble des solutions est $\operatorname{Vect}(h)$ où $h(x)=e^{x^2}$ aussi $\exists\mathrm{K}\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\mathrm{K}e^{x^2}$
On précise K en évoluant en $x=0$: $\mathrm{K}=f(0)=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ soit $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{x^2}}$

PT : TD N° 2 SUR LE CHAPITRE XIII

EXERCICE N° 2 On définit la fonction f par : $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

1. Prouver que, pour tout t réel, on a : $|\sin t|\leqslant|t|$

Si la relation est vraie pour $t\geqslant 0$, elle l'est aussi pour $t\leqslant 0$ car : $|\sin(-t)|=|-\sin t|=|\sin t|$ et $|-t|=|t|$

Pour $t\geqslant 0$: $\sin t=[\sin u]_0^t=\displaystyle\int_0^t\cos u\,du$ d'où $|\sin t|=\left|\displaystyle\int_0^t\cos u\,du\right|\leqslant\displaystyle\int_0^t|\cos u|du\leqslant\int_0^t du=t=|t|$

2. Prouver que f est définie sur $[0,+\infty[$.

On pose $u(x,t)=e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ pour $(x,t)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[$

Pour $x\geqslant 0$ fixé, $[t\mapsto u(x,t)]$ est C^0 sur $]0,+\infty[$ et : $\forall t>0, |u(x,t)|\leqslant e^{-xt}\times\dfrac{|t|}{t}=e^{-xt}$

• Si $x>0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\mathrm{d}t$ converge donc on peut dire que $[t\mapsto u(x,t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si $x>0$

• Si $x=0$,

$f(0)$ est faussement généralisée en $t=0$: $f(0,t)=\dfrac{\sin t}{t}\sim_{t\to 0}1\xrightarrow[t\to 0]{}1$ (prolongement par continuité en 0)

$f(0)$ a donc la même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

On peut réaliser une IPP avec $\begin{cases}u'(t)=\sin t\\ v(t)=\frac{1}{t}\end{cases}$ d'où $\begin{cases}u(t)=\cos t\\ v'(t)=-\frac{1}{t^2}\end{cases}$ où u et v sont de classe C^1 sur $[1,+\infty[$.

i) $[u(t)v(t)]_1^{+\infty}=\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{\cos t}{t}-\frac{\cos 1}{1}=-\cos 1$ converge

ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ converge car l'intégrande est intégrable sur $[1,+\infty[$ puisque $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ CV

On peut donc conclure que l'IPP est possible et $f(0)=-\cos 1+\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\boxed{f(x)\text{ est définie pour tout }x\geqslant 0}$

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ et, en admettant $|f(x)-f(0)|\leqslant 2x$ pour tout réel $x\geqslant 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}|f(x)-0|=0$ or : $|f(x)-0|=\left|\displaystyle\int_0^{+\infty}u(x,t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}|u(x,t)|\mathrm{d}t$ (inégalité triangulaire)

mais on a vu que : $\forall t>0, |u(x,t)|\leqslant e^{-xt}$ donc, par croissance de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|u(x,t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-xt}\mathrm{d}t$

Ainsi : $|f(x)|\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$ (intégrale de référence)

Puisque : $\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ on peut conclure que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$ par encadrement

• Si, pour $x>0$: $|f(x)-f(0)|\leqslant 2x$ et : $2x\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$ alors $|f(x)-f(0)|\xrightarrow[x\to 0^+]{}0\Leftrightarrow\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)}$

4. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et qu'elle est continue sur $[0,+\infty[$

On pourra dominer sur $[\varepsilon,+\infty[$ *pour* $\varepsilon>0$

• Énonçons le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. Sous réserve de vérifier

i) $\forall x>0$, $[t\mapsto u(x,t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

ii) $\forall t\in]0,+\infty[$, $[x\mapsto u(x,t)]$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$la limite en 0

iii) $\forall x>0$, $\left[t\mapsto\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur $]0,+\infty[$

iv) Domination : il existe φ_ε positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec $\forall x\in[\varepsilon,+\infty[, \forall t\in]0,+\infty[, \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi_\varepsilon(t)$

on pourra conclure que f est C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$ pour tout $\varepsilon>0$ fixé soit, puisque $]0,+\infty[=\displaystyle\bigcup_{\varepsilon>0}[\varepsilon,+\infty[$ et que cette propriété est locale, que f est C^1 sur $]0,+\infty[$ avec : $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$

• Vérifions les hypothèses du théorèmes :

- Avec la question 2, on sait déjà que i) est vérifiée
- Avec les théorèmes usuels sur les fonctions de 2 variables, u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ donc aussi sur $]0,+\infty[^2$ et, en passant aux applications partielles, on peut affirmer que ii) et iii) sont vérifiées.
- Pour la domination : $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=-te^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}=-e^{-xt}\sin t$ d'où $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|=e^{-tx}|\sin t|$

Pour $x\in[\varepsilon,+\infty[$ et $t\in]0,+\infty[$: $x\geqslant\varepsilon\underset{\text{car }-t\leqslant 0}{\Rightarrow}-tx\leqslant-\varepsilon t\underset{\text{exp est croissante}}{\Rightarrow}e^{-tx}\leqslant e^{-t\varepsilon}\underset{\text{car }|\sin t|\geqslant 0}{\Rightarrow}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant e^{-\varepsilon t}|\sin t|\underset{\text{car }|\sin t|\leqslant 1}{\leqslant}e^{-\varepsilon t}=\varphi_\varepsilon(t)$

où $[\varphi_\varepsilon:t\mapsto e^{-\varepsilon t}]$ est $\geqslant 0$ et est intégrable sur $]0,+\infty[$ (intégrale de référence) et donc iv) est vérifiée.

Remarques : Ici, on peut « pousser » la majoration plutôt que d'utiliser la majoration optimale issue de la contrainte car le $|\sin t|$ n'apporte pas de contribution à l'intégrabilité

Une domination sur $]0,+\infty[$ totalement n'est pas possible sans perdre l'intégrabilité : $e^{-xt}\leqslant 1$ est alors la majoration optimale conduisant à $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant|\sin t|$ où $[t\mapsto|\sin t|]$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$

Lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur x, cela signifie qu'on peut majorer de façon à « faire disparaître » x sans perdre l'intégrabilité.

Par exemples avec ce type de domination où $x\in\mathbb{R}$ et $t>0$: $|\cos(xt)e^{-t}|\leqslant e^{-t}$, $|\mathrm{Arctan}(xt)e^{-t}|\leqslant\frac{\pi}{2}e^{-t}$ ou $\left|\dfrac{e^{-t}}{1+x^2t}\right|\leqslant\dfrac{e^{-t}}{1+0}=e^{-t}$

• On a donc aussi $\boxed{f\text{ est continue sur }[0,+\infty[}$ puisque f est C^0 (car C^1) sur $]0,+\infty[$ et que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ (vu en question 3) assure que f est aussi continue en 0.

5. Prouver que : $\forall x>0$, $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$. Exprimer alors $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

• On sait que : $\forall x>0$, $f'(x)=-\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t$

Méthode n° 1 : $f'(x)=\Im m\left(-\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}e^{it}\mathrm{d}t\right)$ or $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}e^{it}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{(i-x)t}\mathrm{d}t=\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty}=0-\left(\frac{1}{i-x}\right)$

puisque, lorsque t tend vers $+\infty$: $\left|\dfrac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right|=\dfrac{|e^{it}e^{-xt}|}{|i-x|}=\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{x^2+1}}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ pour $x>0$ fixé

Ainsi : $f'(x)=\Im m\left(\dfrac{1}{i-x}\right)=\Im m\left(\dfrac{-i-x}{|i-x|^2}\right)=\dfrac{-1}{x^2+1}$ Classique dans $\mathbb{C}$: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Méthode n° 2 : On réalise deux IPP successives avec :

$\begin{cases}u(t)=-e^{-xt}\\ v'(t)=\sin t\end{cases}$ d'où $\begin{cases}u'(t)=xe^{-xt}=u_1(t)\\ v(t)=-\cos t=v_1'(t)\end{cases}$ puis $\begin{cases}u_1'(t)=-x^2e^{-xt}\\ v_1(t)=-\sin t\end{cases}$ où u, v, u_1 et v_1 sont C^1 sur $]0,+\infty[$

Les IPP sont possibles car : l'intégrale de départ $f'(x)$ est CV

et $[u(t)v(t)]_0^{+\infty}=\displaystyle\lim_{t\to+\infty}e^{-xt}\cos t-1=-1$ CV car $|e^{-xt}\cos t|\leqslant e^{-xt}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ si $x>0$

puis $[u_1(t)v_1(t)]_0^{+\infty}=-\displaystyle\lim_{t\to+\infty}xe^{-xt}\sin t+0=0$ CV car $|xe^{-xt}\sin t|\leqslant xe^{-xt}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ si $x>0$

Ainsi : $f'(x)=-1-\displaystyle\int_0^{+\infty}xe^{-xt}\times(-\cos t)\mathrm{d}t=-1-\left(0-\int_0^{+\infty}(-x^2e^{-xt})(-\sin t)\mathrm{d}t\right)=-1-x^2f'(x)$

et donc : $(1+x^2)f'(x)=-1\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

• En intégrant, on a : $\forall x>0$, $f'(x)=\left(-\mathrm{Arctan}(x)\right)'\Leftrightarrow\exists K\in\mathbb{R},\forall x>0$, $f(x)=-\mathrm{Arctan}\,x+K$

En utilisant $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ (question 3), on a : $0=-\dfrac{\pi}{2}+K\Leftrightarrow K=\dfrac{\pi}{2}$ donc :

$\boxed{\forall x>0,\ f(x)=-\mathrm{Arctan}\,x+\dfrac{\pi}{2}=\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x}}$

6. Déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

En utilisant $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ (question 3), on a : $f(0)=0+\dfrac{\pi}{2}$ or $f(0)=I$ donc finalement : $\boxed{I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}}$

PT : TD N° 3 SUR LE CHAPITRE XIII

EXERCICE N° 3 On considère la fonction f définie par : $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\mathrm{d}t$

1. Établir et quantifier l'égalité : $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(2t)\mathrm{d}t = x\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$

Dans le 1er membre, on reconnaît une intégrale dépendant de sa borne qu'on traite en introduisant une primitive.

$\left[U : x\mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(2t)\mathrm{d}t\right]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme primitive de la fonction $[u : t\mapsto \mathrm{Arctan}(2t)]$ qui est bien C^0 sur $\mathbb{R}$. C'est la primitive s'annulant en 0 de u donc : $U'(x)=u(x)=\mathrm{Arctan}(2x)$ et $U(0)=0$

D'autre part, $\left[v : x\mapsto x\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)\right]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes usuels $(1+4x^2>0)$

et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $v'(x)=\mathrm{Arctan}(2x)+x\times\dfrac{2}{1+(2x)^2}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{8x}{1+4x^2}=\mathrm{Arctan}(2x)$

Ainsi : $\forall x\in\mathbb{R}$, $U'(x)=v'(x)$ en intégrant : $\exists K\in\mathbb{R}, \forall x\in\mathbb{R}$, $U(x)=v(x)+K$ et, en évaluant en $x=0$: $0=0+K$

Finalement : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(2t)\mathrm{d}t = x\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)}$

Une autre approche possible : réaliser une IPP sur le segment $[\min(0,x),\max(0,x)]$ où x est un réel fixé avec

$\begin{cases} u(t)=\mathrm{Arctan}(2t)\\ v'(t)=1\end{cases}$ et $\begin{cases} u'(t)=\dfrac{2}{1+4t^2}\\ v(t)=t\end{cases}$ où u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}$

L'IPP est toujours possible puisqu'elle est réalisé sur un segment.

$\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(2t)\mathrm{d}t=\Big[t\mathrm{Arctan}(2t)\Big]_0^x-\int_0^x\frac{2t}{1+4t^2}\mathrm{d}t = x\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\int_0^x\frac{w'(t)}{w(t)}\mathrm{d}t$ avec $w(t)=1+4t^2$

de sorte que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(2t)\mathrm{d}t = x\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\Big[\ln(1+4t^2)\Big]_0^x = x\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$

2. Prouver que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On rappelle que $\forall u\in\mathbb{R}$, $|\sin u|\leqslant|u|$.

On pose $g(x,t)=\dfrac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}$ Commençons par établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit de vérifier les hypothèses de dérivation d'une intégrale à paramètre :

i) $\forall x\in\mathbb{R}$, $[t\mapsto g(x,t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

ii) $\forall t\in]0,+\infty[$, $[x\mapsto g(x,t)]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

iii) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left[t\mapsto\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur $]0,+\infty[$

iv) *Domination* :

il existe φ continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec $\forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$

En tant que fonction de deux variables, g est C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ donc aussi sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. Cela signifie que g admet des dérivées partielles qui sont C^1 sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. En passant aux applications partielles, on a donc ii) et iii) sont vérifiées ainsi que la continuité de $[t\mapsto g(x,t)]$ à $x\in\mathbb{R}$ fixé nécessaire pour prouver i).

Pour prouver i), il reste à justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty}|g(x,t)|\mathrm{d}t$ converge pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$:

$\forall t>0$, $|g(x,t)|=\dfrac{e^{-t}}{t^2}\underbrace{|\sin(xt)|^2}_{\leqslant|xt|^2}\leqslant\dfrac{\cancel{t^2}x^2}{\cancel{t^2}}e^{-t}=x^2e^{-t}$ or $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^2e^{-t}\mathrm{d}t=x^2\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}|g(x,t)|\mathrm{d}t$ converge par majoration et donc i) est bien vérifiée.

L'avantage de cette preuve est qu'elle évite d'avoir à distinguer le cas $x=0$ par rapport à la séparation des problèmes : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|g(x,t)|\mathrm{d}t=\int_0^1|g(x,t)|\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}|g(x,t)|\mathrm{d}t$

En 0 : $|g(x,t)|\sim_0\dfrac{(xt)^2}{t^2}\times1\sim_0 x^2$ si $x\neq0$ permet de justifier un prolongement par continuité en $t=0$

$|g(0,t)|=0\xrightarrow[t\to0]{}0$ permet aussi de prolonger par continuité en $t=0$

En $+\infty$: $|g(x,t)|=\dfrac{1}{t^2}\underbrace{|\sin(x,t)|^2}_{\leqslant1}\underbrace{e^{-t}}_{\leqslant1}\leqslant\dfrac{1}{t^2}$ or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha=2>1$)

Étudions maintenant la domination :

$\forall x\in\mathbb{R},\forall t>0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\dfrac{e^{-t}}{t^2}\times2(\sin(xt))\dfrac{\partial}{\partial x}(\sin(xt))=\dfrac{e^{-t}}{t^2}\times2t\sin(xt)\cos(xt)=\dfrac{\sin(2xt)}{t}e^{-t}$

Alors : $\forall x\in\mathbb{R},\forall t>0$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|=\dfrac{e^{-t}}{t}|\sin(xt2)|\leqslant\dfrac{e^{-t}}{t}\times|2xt|=2|x|e^{-t}$

Une première majoration naïve (en majorant $|sin(2xt)|\leqslant1$) pourrait être : $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\dfrac{e^{-t}}{t}$

sauf que $\dfrac{e^{-t}}{t}\sim_{t\to0}\dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0! On utilise donc une majoration plus précise : $|\sin(2xt)|\leqslant|2xt|$

La domination est alors par : $|x|e^{-t}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$ mais elle dépend de x...On doit donc utiliser une domination locale pour conclure.

On domine alors localement pour $x\in[-A,A]$ où $A>0$: $\forall x\in[-A,A],\forall t>0$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant2Ae^{-t}=\varphi_A(t)$

où φ_A est continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après le cours)

On a donc prouvée que f est de classe C^1 sur $[-A,A]$ et, puisque la classe C^1 est une propriété locale et que $\mathbb{R}=\bigcup_{A>0}[-A,A]$, on peut conclure que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ avec : $f'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2xt)}{t}e^{-t}\mathrm{d}t$

Pour obtenir que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on applique à nouveau le théorème à l'intégrale à paramètre $f'(x)$ pour prouver que f' est C^1 sur $\mathbb{R}$. On pose $v(x,t)=\dfrac{\sin(2xt)}{t}e^{-t}$ et on vérifie :

a) $\forall x\in\mathbb{R}$, $[t\mapsto v(x,t)]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. b) $\forall t\in]0,+\infty[$, $[x\mapsto v(x,t)]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left[t\mapsto\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur $]0,+\infty[$

d) *Domination* : il existe φ continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ avec $\forall x\in\mathbb{R},\forall t\in]0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$

La majoration obtenue dans la domination précédent justifie que $v(x,.)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x réel aussi a) est bien vérifiée. En tant que fonction de deux variables, $v=\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ puisque g est de classe C^2 aussi b) et c) sont vraies.

De plus : $\forall x\in\mathbb{R},\forall t>0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)=2\cos(2xt)e^{-t}$ d'où $\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant2e^{-t}=\varphi(t)$ où φ est continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ (intégrale de référence) donc d) est bien vérifiée.

Puisque a),b),c) et d) vérifiées, f' est de classe C^1 sur $]0,+\infty\Leftrightarrow$ $\boxed{f \text{ est bien de classe } C^2 \text{ sur }]0,+\infty[}$

3. Préciser $f''(x)$ et en déduire l'expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}2\cos(2xt)e^{-t}\mathrm{d}t=\Re e\left(\int_0^{+\infty}2e^{2ixt}e^{-t}\mathrm{d}t\right)=\Re e\left(\left[2\frac{e^{(2ix-1)t}}{2ix-1}\right]_0^{+\infty}\right)=\Re e\left(0-\frac{2}{2ix-1}\right)$

car $\left|2\dfrac{e^{(2ix-1)t}}{2ix-1}\right|=\dfrac{2e^{-t}}{\sqrt{4x^2+1}}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ aussi $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=\Re e\left(\dfrac{1+2ix}{1+4x^2}\right)=\dfrac{1}{1+4x^2}$

Alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{1+(2x)^2}=\left(\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2x)\right)'\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2x)=\left(\dfrac{1}{2}v(x)\right)'+\lambda$

$\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}v(x)+\lambda x+\mu$

On sait que $f(0)=0\Leftrightarrow0+0+\mu=0$ et aussi : $f'(0)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}v'(0)+\lambda=0\Leftrightarrow0+\lambda=0$

Ainsi : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x\mathrm{Arctan}(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)}$ Double IPP possible pour le calcul de $f''(x)$ plutôt qu'un passage en complexe.