EXERCICE N° 5 *D'après sujet B, banque PT 2018*

Pour $(a,b)\in\mathbb{C}^2$, on définit $g_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui, au vecteur $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ d'affixe $z=x+iy$, associe le vecteur $g_{a,b}(u)$ de $\mathbb{R}^2$ d'affixe $f_{a,b}(z)=az+b\overline{z}$. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est notée (e_1,e_2).

1. Démontrer qu'on a bien $g_{a,b}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Pour alléger, notons $g_{a,b}=g$ et $f_{a,b}=f$ dans cette question en considérant que a et b sont fixés.
Il s'agit de montrer :

i) $\forall u\in\mathbb{R}^2,\ g(u)\in\mathbb{R}^2$ et ii) g est linéaire i.e. $\forall(u_1,u_2)\in\left(\mathbb{R}^2\right)^2, \forall\alpha\in\mathbb{R},\ g(\alpha u_1+u_2)=\alpha g(u_1)+g(u_2)$

Pour i) : i) est assuré par définition de g : $g(u)=v$ où $v\in\mathbb{R}^2$ est le vecteur d'affixe $f(z)$ lorsque u a pour affixe z.

Pour ii) : il s'agit d'établir l'égalité des vecteurs $g(\alpha u_1+u_2)$ et $\alpha g(u_1)+g(u_2)$ dans $\mathbb{R}^2$.
Or des vecteurs sont égaux s'ils ont la même affixe. Si u_1 (resp. u_2) a pour affixe z_1 (resp. z_2)
Il suffit de vérifier que $f(\alpha z_1+z_2)=\alpha f(z_1)+f(z_2)$ mais, par définition :

$$f(\alpha z_1+z_2)=a(\alpha z_1+z_2)+b\overline{(\alpha z_1+z_2)}=a(\alpha z_1+z_2)+b(\underbrace{\alpha\overline{z_1}}_{\text{puisque }\alpha\text{ est réel}}+\overline{z_2})=\alpha(az_1+b\overline{z_1})+(az_2+b\overline{z_2})=\alpha f(z_1)+f(z_2)$$

Ainsi, i) et ii) étant démontré, on peut conclure que $\boxed{g=g_{a,b}\text{ est un endomorphisme de }\mathbb{R}^2}$

2. Écrire la matrice $G_{a,b}$ de $g_{a,b}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$e_1=(1,0)$ a pour affixe $z=1$ aussi $g(e_1)$ a pour affixe $f_{a,b}(e_1)=a+b$.
$e_2=(0,1)$ a pour affixe $z=i$ aussi $g(e_2)$ a pour affixe $f_{a,b}(e_2)=ia-ib$.
Par suite : $g(e_1)=\left(\Re e(a)+\Re e(b),\Im m(a)+\Im m(b)\right)$ et $g(e_2)=\left(-\Im m(a)+\Im m(b),\Re e(a)-\Re e(b)\right)$

Finalement : $G_{a,b}=\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(g_{a,b})=\boxed{\begin{pmatrix}\Re e(a)+\Re e(b) & -\Im m(a)+\Im m(b)\\ \Im m(a)+\Im m(b) & \Re e(a)-\Re e(b)\end{pmatrix}=G_{a,b}}$

3. (Pour les 5/2 pour l'instant) On suppose dans cette question uniquement que $a\in\mathbb{R}$.
La matrice $G_{a,b}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? Que dire de plus sur ses sous-espace propres ?

On a alors : $G_{a,b}=\begin{pmatrix}a+\Re e(b) & \Im m(b)\\ \Im m(b) & a-\Re e(b)\end{pmatrix}$ est une matrice symétriques réelles.
D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ et les sous-espaces propres sont orthogonaux.

4. a. Déterminer le polynôme caractéristique de $G_{a,b}$.

Pour une matrice d'ordre 2, on a :
$\chi_{G_{a,b}}(x)=x^2-\mathrm{tr}(G_{a,b})x+\det(G_{a,b})=x^2-2\Re e(a)x+\left(\Re e^2(a)-\Re e^2(b)-\Im m^2(b)+\Im m^2(a)\right)$
soit : $\boxed{\chi_{G_{a,b}}(x)=x^2-2\Re e(a)+|a|^2-|b|^2}$

b. On suppose que $|b|^2\neq(\Im m(a))^2$. La matrice $G_{a,b}$ est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$?
Est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$? Discuter en fonction de a et b.

Le discriminant de $\chi_{G_{a,b}}$ est $\Delta=4(\Re e(a))^2-4\left(|a|^2-|b|^2\right)=4\left(|b|^2-(\Im m(a))^2\right)$
Au vu de l'hypothèse faite, on a donc $\Delta\neq0$ et $\chi_{G_{a,b}}$ possède deux racines complexes distinctes de sorte que $\chi_{G_{a,b}}$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ et on peut conclure que $\boxed{G_{a,b}\text{ est diagonalisable dans }M_2(\mathbb{C})}$

Si $|b|^2>(\Im m(a))^2$ alors $\Delta>0$ et les deux racines sont réelles de sorte que $\chi_{G_{a,b}}$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ et on peut conclure que $\boxed{G_{a,b}\text{ est diagonalisable dans }M_2(\mathbb{R})}$
Si $|b|^2<(\Im m(a))^2$ alors $\Delta<0$ et il n'y a pas de racine réelle de sorte que $\chi_{G_{a,b}}$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et on peut donc conclure que $\boxed{G_{a,b}\text{ n'est pas diagonalisable dans }M_2(\mathbb{R})}$

c. On suppose que $|b|^2=(\Im m(a))^2$.
Démontrer que $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $a\in\mathbb{R}$ et $b=0$.

Sous cette hypothèse, $\Delta=0$ et $\chi_{G_{a,b}}$ possède une racine réelle $x_0=\Re e(a)$ d'ordre $m(x_0)=2$.
$G_{a,b}$est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\dim\mathrm{Ker}\,(G_{a,b}-\Re e(a)I_2)=2$
Or $\mathrm{Ker}\,(G_{a,b}-\Re e(a)I_2)$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ et $\dim\mathbb{R}^2=2$ aussi la condition $\dim\mathrm{Ker}\,(G_{a,b}-\Re e(a)I_2)=2$ est équivalente à $\mathrm{Ker}\,(G_{a,b}-\Re e(a)I_2)=\mathbb{R}^2$ soit à $G_{a,b}-\Re e(a)I_2=0$ Mais :

$$G_{a,b}-\Re e(a)I_2=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\Re e(b) & -\Im m(a)+\Im m(b)\\ \Im m(a)+\Im m(b) & -\Re e(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Im m(a)=\Im m(b)=0 & \text{avec les coefficients antidiagonaux}\\ \Re e(b)=0 & \text{avec les coefficients diagonaux}\end{cases}\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\text{ et }b=0$$

En définitive : $\boxed{\text{si }|b|^2=(\Im m(a))^2:\quad G_{a,b}\text{ est diagonalisable dans }M_2(\mathbb{R})\text{ si et seulement si }a\in\mathbb{R}\text{ et }b=0}$

d. A quelle(s) condition(s), $g_{a,b}$ est-il diagonalisable ?

$g_{a,b}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ est diagonalisable $\Leftrightarrow G_{a,b}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$
Les questions 3b et 3c conduisent à étudier toutes les configurations et on peut conclure :

$$\boxed{g_{a,b}\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)\text{ est diagonalisable}\Leftrightarrow|b|^2>(\Im m(a))^2\quad\text{ou}\quad\left(a\in\mathbb{R}\text{ et }b=0\right)}$$