EXERCICE N° 8 *Réduction simultanée (d'après sujet A, banque PT 2012 librement adapté à partir de 2e)*

1. *Question préliminaire*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que $f\circ g = g\circ f$.

Si λ est une valeur propre de f, démontrer que $E_\lambda(f)$, le sous-espace propre de f associé à λ, est stable par g.

Il s'agit de démontrer que : $\forall x\in E_\lambda(f),\ g(x)\in E_\lambda(f)$ sachant que : $x\in E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}\,(f-\lambda id) \Leftrightarrow f(x)=\lambda x$

On suppose donc que $f(x)=\lambda x$ et on vérifie qu'alors $f\big(g(x)\big)=\lambda g(x)$.

Or : $f\big(g(x)\big) = f\circ g(x) = g\circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(\lambda x) = \alpha g(x)$ par linéarité de g

2. Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&-1\\1&1&3\end{pmatrix}$$

a. Montrer que f et g commutent.

Par pré-multiplication de A sur B : $AB=\begin{pmatrix}L_1\\-L_3\\L_2+2L_3\end{pmatrix}$ où L_i ligne i de B soit : $AB=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-1&-3\\1&3&5\end{pmatrix}$

Par post-multiplication de A sur B : $BA=\begin{pmatrix}C_1 & C_3 & -C_2+2C_3\end{pmatrix}$ où C_i colonne i de B soit : $BA=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-1&-3\\1&3&5\end{pmatrix}$

Ainsi : $AB=BA \Leftrightarrow f\circ g = g\circ f \Leftrightarrow$ $\boxed{f \text{ et } g \text{ commutent}}$

b. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g.

Les matrices A et B sont-elle diagonalisables? trigonalisables?

Puisque f et g sont canoniquement associées à A et B, les éléments propres de f (resp. g) sont ceux de A (resp. de B). Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x)=\det(xI_3-A)=\begin{vmatrix}x-1&0&0\\0&x&1\\0&-1&x-2\end{vmatrix}=(x-1)\big(x(x-2)+1\big)=(x-1)(x-1)^2=(x-1)^3 \text{ par dév selon } C_1$$

$A-I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1 (colonnes 2 à 2 proportionnelles). Par le théorème du rang : $\dim E_A(1)=\dim \mathrm{Ker}\,(A-I_3)=2$ et, trivialement, $u_1=(1,0,0)$ et $u_2=(0,1,-1)$ sont dans $\mathrm{Ker}\,(A-I_3)$ et non colinéaires et donnent une base de $E_1(A)$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(A)=\{1\} \text{ et } E_1(A)=\mathrm{Ker}\,(A-I_3)=\mathrm{Vect}(u_1,u_2) \text{ où } u_1=(1,0,0),\ u_2=(0,1,-1)}$

Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, $\boxed{\text{la matrice A est trigonalisable dans } M_3(\mathbb{R})}$

Comme $\dim E_1(A)$ n'est pas égale à la multiplicité de 1 comme racine de χ_A, $\boxed{\text{la matrice A n'est pas diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R})}$

$$\chi_B(x)=\begin{vmatrix}x&-1&-1\\1&x-1&1\\-1&-1&x-3\end{vmatrix}=\underset{C_3\leftarrow C_3-C_2}{\begin{vmatrix}x&-1&0\\1&x-1&2-x\\-1&-1&x-2\end{vmatrix}}=(x-2)\begin{vmatrix}x&-1&0\\1&x-1&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2+L_3}{=(x-2)\begin{vmatrix}x&-1&0\\0&x-2&0\\-1&-1&1\end{vmatrix}}$$

puis, en développant suivant la troisième colonne : $\chi_B(x)=x(x-2)^2$ d'où $\boxed{\mathrm{Sp}(B)=\{0,2\}}$ et dans $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}\,B \Leftrightarrow \begin{cases}y+z=0\\-x+y-z=0\\x+y+3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-z\\x=-2z\\0=0\end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=z(-2,-1,1) \text{ aussi } \boxed{E_0(B)=\mathrm{Ker}\,B=\mathrm{Vect}\big((2,1,-1)\big)}$$

$\mathrm{B}-2\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (2 colonnes égale et 2 colonnes non colinéaires) et, par le théorème du rang : $\dim \mathrm{E}_2(\mathrm{B}) = \dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-2\mathrm{I}_2) = 3-2 = 1$

De plus l'égalité des colonnes 2 et 3 donne $(0,1,-1) \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{B}-2\mathrm{I}_2)$ soit $\boxed{\mathrm{E}_2(\mathrm{B}) = \mathrm{Vect}\big((0,1,-1)\big)}$

Comme χ_B est scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\boxed{\text{la matrice B est trigonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$
Comme $\dim \mathrm{E}_2(\mathrm{B})$ n'est pas égale à la multiplicité de 2 comme racine de χ_B, $\boxed{\text{la matrice B n'est pas diagonalisable dans } \mathrm{M}_3(\mathbb{R})}$

c. On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g.

Un espace propre de f est stable par f et, puisque f et g commutent, il est aussi stable par g d'après la question préliminaire. Ici, d'après la question précédente, $e_1 = \alpha(0,1,-1)$ où $\alpha \neq 0$ donc $e_2 = \alpha u_2 \in \mathrm{E}_1(\mathrm{A})$ est aussi un vecteur propre de f et $\alpha u_2 = (0, \alpha, -\alpha)$ ne sera jamais colinéaire à $u_1 = (1,0,0)$ à cause de la première composante. Aussi, en prenant $e_2 = u_1 = (1,0,0)$, on obtient une famille libre de 2 vecteurs de $\mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{E}_1(f)$ qui est de dimension 2 donc $\mathrm{E}_1(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.qui est bien stable par f et par g

d. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

On a : $f(e_1) = e_1$, $g(e_1) = 2e_1$, $f(e_2) = e_2$ et $g(e_2) \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ soit $g(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
On peut compléter la famille libre (e_1, e_2) en une base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ (c'est le théorème de la base incomplète. Comme $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \mathrm{E}$, $f(e_3)$ et $g(e_3)$ sont aussi dans $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ soit $\begin{cases} f(e_3) = ae_1 + be_2 + ce_3 \\ g(e_3) = \gamma e_1 + \delta e_2 + \varepsilon e_3 \end{cases}$ où $(a, b, c, \gamma, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3$ et, par définition :

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ sont bien triangulaires supérieures.

e. On choisit e_1 et e_2 avec $e_1 = (?;-1;?)$ et $e_2 = (1,?,?)$ où ? est un coefficient inconnu. Déterminer un vecteur e_3 tel que, dans la base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$, les matrice de f et g sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Au vu de la question 2c : $e_1 = (0, -1, 1)$ (ie $\alpha = -1$) et $e_2 = (1,0,0)$
On a vu que e_1 et e_2 sont dans le sev $\mathrm{E}_1(f)$ aussi : $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$
Par ailleurs, $e_1 \in \mathrm{E}_2(g)$ donc $g(e_1) = 2e_1$ et $g(e_2) = g(1,0,0) = (0,-1,1) = e_1$ (avec la colonne 1 de B)

Enfin, on cherche $e_3 = (x, y, z)$ avec : $f(e_3) = e_1 + e_3 \Leftrightarrow (\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y + z = 1$ mais on veut aussi

$g(e_3) = 2e_3 + e_2 + e_1 \Leftrightarrow (\mathrm{B} - 2\mathrm{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ -x - y - z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \qquad \text{car } y + z = 1$

Enfin : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -(z+y) \neq 0 \Leftrightarrow -1 \neq 0$ est vérifié pour tout choix de y et z avec $y + z = 1$

On peut donc choisir $\boxed{e_3 = (0, y, 1-y) \text{ où } y \in \mathbb{R} \text{ est quelconque}}$

3. On considère désormais la matrice C qui a les mêmes coefficients que B sauf le coefficients ligne 1 colonne 1 qui vaut 3 on appelle h l'endomorphisme canoniquement associé à C.

a. Démontrer que h est diagonalisable. *On pourra adapter les calculs faits pour* B

En reprenant le calcul du polynôme caractéristique, on trouve $\chi_h(x) = \chi_C(x) = (x-3)(x-2)^2$
3 est valeur propre simple donc l'espace propre associé est de dimension 1
la matrice $C - 2I_3$ a cette fois trois colonnes identiques aussi elle est de rang 1 et, par le théorème du rang, l'espace propre $E_2(h) = E_2(C) = \text{Ker }(C - 2I_3)$ est de dimension 2
Finalement : χ_h est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et la dimension des sev propres est égales à l'ordre de multiplicité des valeurs propres de h donc h est diagonalisable

b. Préciser une base $\mathscr{B}'' = (v_1, v_2, v_3)$ dans laquelle la matrice de h est $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

On a : $E_3(h) = \text{Ker }(C - 3I_3) = \text{Vect}\Big((1,0,0)\Big)$ et $E_2(h) = \text{Vect}\Big((1,-1,0),(0,1,-1)\Big)$ alors $\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}''}(h) = \text{diag}(3,2,2)}$ où $\boxed{\mathscr{B}'' = (v_1, v_2, v_3) \text{ où } v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,-1,0) \text{ et } v_3 = (0,1,-1) \text{ est une base de diagonalisation de } h}$

c. Le commutant $\mathscr{K}$ de h est l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec h autrement dit

$$\mathscr{K} = \Big\{\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \;\Big|\; h \circ \varphi = \varphi \circ h\Big\}$$

i. Démontrer que $\mathscr{K}$ est espace vectoriel.

On montre que c'est un sev de $\mathscr{L}(E)$: $\underline{\mathscr{K} \subset \mathscr{L}(E)\ (i)}$ et $\underline{\mathscr{K} \neq \emptyset\ (ii)}$ puisque $id \in \mathscr{K}$
De plus, pour $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathscr{K}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors : $h \circ (\alpha\varphi_1 + \varphi_2) = \alpha h \circ \varphi_1 + h \circ \varphi_2$ car h est linéaire
$= \alpha\varphi_1 \circ h + \varphi_2 \circ h = (\alpha\varphi_1 + \varphi_2) \circ h$
aussi $\alpha\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathscr{K}$ donc $\underline{\mathscr{K} \text{ est stable par combinaison linéaire } (iii)}$
Alors : $(i), (ii)$ et $(iii) \Rightarrow \mathscr{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$

ii. Pour $\varphi \in \mathscr{K}$, en utilisant la question préliminaire, justifier que :

$$\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \in \mathbb{R}^5, \quad \varphi(v_1) = \alpha v_1, \quad \varphi(v_2) = \beta v_2 + \gamma v_3 \quad \text{et} \quad \varphi(v_3) = \delta v_2 + \varepsilon v_3$$

Préciser alors les matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $MD = DM$.

φ laisse stable les sev propres de h d'après la question préliminaire aussi :
Comme $E_3(h) = \text{Vect}(v_1)$, $\varphi(v_1) \in E_3(h) = \text{Vect}(v_1)$ aussi : $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi(v_1) = \alpha v_1$
Comme $E_2(h) = \text{Vect}(v_2, v_3)$, $\varphi(v_2)$ et $\varphi(v_3)$ sont dans $E_2(h) = \text{Vect}(v_2, v_3)$ et donc :

$$\exists(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \in \mathbb{R}^4,\ \varphi(v_2) = \beta v_2 + \gamma v_3 \text{ et } \varphi(v_3) = \delta v_2 + \varepsilon v_3$$

En utilisant l'isomorphisme $\Big[f \longmapsto \text{Mat}_{\mathscr{B}''}(f)\Big]$ de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vers $M_3(\mathbb{R})$, on peut identifier
$\varphi \in \mathscr{K}$ à une matrice M vérifiant $MD = DM$

On vient de voir que, nécessairement : $\boxed{M = \text{Mat}_{\mathscr{B}''}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \delta \\ 0 & \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \in \mathbb{R}^5}$

puisque $MD = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & 3\delta \\ 0 & 3\gamma & 3\varepsilon \end{pmatrix}$ et $DM = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta & 3\delta \\ 0 & 3\gamma & 3\varepsilon \end{pmatrix}$ donc il n'y a pas de condition supplémentaire à imposer à $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \in \mathbb{R}^5$.

iii. En déduire la dimension de $\mathscr{K}$.

En utilisant l'isomorphisme $\Big[f \longmapsto \text{Mat}_{\mathscr{B}''}(f)\Big]$ de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ vers $M_3(\mathbb{R})$, la dimension de $\mathscr{K}$ est la même que celle de C(M) l'ensemble des matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ avec $MD = DM$.
On a vu que : $C(M) = \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33})$ et la famille $(E_{11}, E_{22}, E_{23}, E_{32}, E_{33})$ est libre (car sous-famille d'une famille libre) aussi : $\boxed{\dim \mathscr{K} = \dim C(M) = 5}$