EXERCICE N° 5 le 3) Calculer $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$ où x est un paramètre réel

On développe selon la première ligne :

$$D_n(x) = +x \times D_{n-1}(x) + (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x \\ n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe le second déterminant (d'ordre $n-1$) selon la première colonne :

$$D_n(x) = xD_{n-1}(x) + (-1)^{n+1}(n-1) \times (-1)^n(n-1) \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = xD_{n-1}(x) - (n-1)^2 x^{n-2}$$

En itérant :

$D_n(x) = x\Big(xD_{n-2}(x) - (n-2)^2 x^{n-3}\Big) - (n-1)^2 x^{n-2} = x^2 D_{n-2}(x) - \Big((n-1)^2 + (n-2)^2\Big)x^{n-2}$

puis :

$D_n(x) = x^2\Big(xD_{n-3}(x) - (n-3)^2 x^{n-4}\Big) - \Big((n-1)^2 + (n-2)^2\Big)x^{n-2} = x^3 D_{n-3}(x) - \Big((n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2\Big)x^{n-2}$

Ainsi :

$$D_n(x) = \dots = x^{n-2}D_2 - \left(\sum_{k=2}^{n-1} k^2\right)x^{n-2} = x^{n-2}(x^2-1) - \left(\sum_{k=2}^{n-1} k^2\right)x^{n-2} = x^n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)x^{n-2} = x^n - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}x^{n-2}$$

EXERCICE N° 6 Soit $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

Pour $n \geqslant 3$, on pourra rechercher une relation entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2}

On a : $D_1 = 1+x^2$ et $D_2 = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4$

et, si $n \geqslant 3$, en développant selon la première colonne puis selon la première ligne dans le 2nd déterminant :

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$$

(D_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est : $r^2 - (1+x^2)r + x^2 = 0$

Le discriminant est $\Delta = (1+x^2)^2 - 4x^2 = (1-x^2)^2$ donc de racines $\dfrac{1+x^2-(1-x^2)}{2} = x^2$ et $\dfrac{1+x^2+(1-x^2)}{2} = 1$

<u>1er cas</u> : Si $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ alors $\boxed{D_n = A + Bx^{2n} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* - \{-1,1\}}$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} D_1 = 1+x^2 \\ D_2 = 1+x^2+x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + Bx^2 = 1+x^2 \\ A + Bx^4 = 1+x^2+x^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1+x^2-Bx^2 \\ Bx^2(x^2-1) = x^4 \end{cases}$$

aussi : $\boxed{B = \dfrac{x^2}{x^2-1}}$ et $A = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{x^2-1} \Leftrightarrow \boxed{A = \dfrac{1}{1-x^2}}$ en particulier, si $x=0$, $D_n = \det(I_n) = 1$

<u>2nd cas</u> : Si $x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1,1\}$ alors $\boxed{D_n = An + B \text{ si } x = \pm 1}$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et $\begin{cases} D_1 = 2 \\ D_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{A = 1} \\ \boxed{B = 1} \end{cases}$