EXERCICE N° 4 Soit $(\mathrm{E}, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
On dit qu'un endomorphisme est antisymétrique quand : $\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{E}, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$

**1.** On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Justifier que, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(e_j), e_i \rangle e_i$

En déduire que la matrice d'un endomorphisme antisymétrique dans une base orthonormée est une matrice antisymétrique.

Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$ alors :

$f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ puis, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ : $\langle f(e_j), e_i \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\langle e_k, e_i \rangle}_{=0 \text{ sauf si } k=i} = x_i \times 1$ car la base est orthonormée

Notons $\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $f$ dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$
Par définition, la $j$ème colonne donne les coordonnée de $f(e_j)$ dans $\mathscr{B}$ donc :

$$a_{ij} = \langle f(e_j), e_i \rangle \underset{\text{car } f \text{ symétrique}}{=} -\langle e_j, f(e_i) \rangle \underset{\text{par symétrie du produit scalaire}}{=} -\langle f(e_i), e_j \rangle = -a_{ji} \quad \text{et A est bien symétrique}$$

**2.** Montrer qu'un endomorphisme $f$ est antisymétrique si et seulement si $\langle f(x), x \rangle = 0$ pour tout $x$ de E

$\Rightarrow$ Si $f$ est antisymétrique : $\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle = -\langle f(x), x \rangle \Rightarrow \langle f(x), x \rangle = 0$
$\Leftarrow$ On a : $\langle f(x+y), x+y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f(x) + f(y), x+y \rangle = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\langle f(x), x \rangle}_{=0} + \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle + \underbrace{\langle f(y), y \rangle}_{=0} = 0$

$\Leftrightarrow \langle f(x), y \rangle = -\langle f(y), x \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$

**3.** Soit $f$ un endomorphisme antisymétrique, montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des supplémentaires orthogonaux.

$\forall x \in \mathrm{Ker}\, f, \forall y \in \mathrm{Im}\, f$, prouvons que $\langle x, y \rangle = 0$
Or : $y \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \exists x' \in \mathrm{E},\ y = f(x')$ donc $\langle x, y \rangle = \langle x, f(x') \rangle = -\langle f(x), x' \rangle = -\langle 0_{\mathrm{E}}, x' \rangle = 0$

Les sev $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ étant orthogonaux, ils sont en somme directe : $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{E}$
Mais, d'après le théorème du rang : $\dim \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim \mathrm{E}$
Aussi, cette inclusion est en fait une égalité : $\boxed{\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathrm{E} \text{ avec } \mathrm{Ker}\, f \text{ et } \mathrm{Im}\, f \text{ sont orthogonaux}}$

**4.** On suppose désormais que $f$ est un endomorphisme antisymétrique et que $n = 3$.

**a.** Justifier que $f$ admet au moins une valeur propre réelle qui ne peut valoir que 0.

Les valeurs propres de $f$ sont les racines du polynôme caractéristique et $\deg \chi_f = n = 3$
Ainsi, à cause du théorème des valeurs intermédiaires, il y a forcément une racine réelle $\lambda$. Soit $x$ un vecteur propre associé à $\lambda$, alors : $f(x) = \lambda x$. Mais : $\langle f(x), x \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ car $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \neq 0$ si $x \neq 0$

**b.** Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

D'après la question précédente, on peut choisir $e_1$ unitaire dans $\mathrm{Ker}\, f$ (càd associé à la valeur propre 0). On complète cette base en une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On sait que $f(e_1) = 0$ donc la colonne 1 de la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$ est nulle.
De plus, pour $j \in \{2, 3\}$ : $\langle f(e_j), e_1 \rangle = -\langle e_j, f(e_1) \rangle = -\langle e_j, 0 \rangle = 0$ donc la ligne 1 de la matrice est nulle.

et : $f(e_2) = 0 + \underbrace{\langle f(e_2), e_2 \rangle}_{=0} e_2 + (\langle f(e_2), e_3 \rangle) e_3 = \alpha e_3$ où $\alpha = \langle f(e_2), e_3 \rangle$ d'où la colonne 2 qui vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$

puis : $f(e_3) = 0 + (\langle f(e_3), e_2 \rangle) e_2 + \underbrace{\langle f(e_3), e_3 \rangle}_{=0} e_3 = (-\langle e_3, f(e_2) \rangle) e_2 + 0 = -\alpha e_2$ d'où la colonne 3 qui vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$