EXERCICE N° 4 Déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = -(v_n + w_n) \\ v_{n+1} = -2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = -2v_n - w_n \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ alors $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Par une récurrence immédiate, on a : $X_n = A^n X_0$ Vu la valeur de X_0, il s'agit de calculer uniquement la deuxième colonne de A^n.

• En l'absence d'indication du sujet, on utilise une réduction de la matrice A :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & x+2 & 3 \\ 0 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = x\Big((x+2)(x+1) - 6\Big) = x(x^2 + 3x - 4) = x(x-1)(x+4)$$

χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc A diagonalisable et les sev propres sont tous de dimension 1.
En trouvant un vecteur dans chacun des sev propres, on obtient une base de ce sev. On obtient facilement ce vecteur en combinant les colonnes des matrices pour les deux premiers sev propres.

$E_0(A) = \text{Ker } A = \text{Vect}\big(\underbrace{(1,0,0)}_{\varepsilon_1}\big)$ puisque la première colonne de A est nulle

$E_1(A) = \text{Ker } (A - I_3) = \text{Ker } \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \text{Vect}\big(\underbrace{(0,1,-1)}_{=\varepsilon_2}\big)$ puisque les colonnes 2 et 3 de $A - I_3$ sont égales.

Pour déterminer $E_{-4}(A) = \text{Ker } (A + 4I_3) = \text{Ker } \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, on peut cette fois utiliser un système :

$$(x,y,z) \in E_{-4}(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - y - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\frac{5}{2}z) = \frac{5}{8}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{8}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad E_{-4}(A) = \text{Vect}\Big(\underbrace{(5,12,8)}_{\varepsilon_3}\Big)$$

On sait que $\mathbb{R}^3 = E_0(A) \oplus E_1(A) \oplus E_{-4}(A)$ aussi $\mathscr{B}_{red} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ de diagonalisation de A.

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP = \text{diag}(0,1,-4) = D$ puis $A^n = P \times \text{diag}(0,1,(-4)^n) \times P^{-1}$

En effet, $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ se réduit en $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}_{red}}(f)$ via la matrice de passage P et donc, $A^n = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n)$ se réduit en $D^n = \text{Mat}_{\mathscr{B}_{red}}(f^n)$ via la même matrice de passage P.

<u>Calcul de P^{-1}</u> : si $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ avec $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ alors $u = e_1$, $v = e_2 - e_3$ et $w = 5e_1 + 12e_2 + 8e_3$
aussi : $e_1 = u$, $w + 8v = 5e_1 + 20e_2 \Rightarrow e_2 = \frac{1}{20}(-5u + 8v + w)$ puis $e_3 = e_2 - v = \dfrac{1}{20}(-5u - 12v + w)$

Or $P^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ aussi : $P^{-1} = \text{Mat}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}\big(e_1, e_2, e_3\big) = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 20 & -5 & -5 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Calcul de A^n</u> :
En exploitant d'abord une pré-multiplication de D^n sur P^{-1} puis en ne calculant concrètement que la deuxième colonne pour le second produit matriciel (la seule utile pour le résultat de $A^n X_0$ vu la valeur de X_0) :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \times \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & (-4)^n & (-4)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} ? & 5(-4)^n & ? \\ ? & 8 + 12(-4)^n & ? \\ ? & -8 + 8(-4)^n & ? \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{5}\big(2 + 3(-4)^n\big), \quad w_n = \frac{2}{5}\big((-4)^n - 1\big) \quad \text{et} \quad u_n = -(-4)^{n-1} \text{si } n \geqslant 1,\ u_0 = 0}$

EXERCICE N° 5 On considère un système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = -4x + 3z \end{cases}$ où x, y, z sont des fonctions inconnues de la variable réelle t supposées dérivables sur $\mathbb{R}$ qu'on écrit, à l'aide d'une matrice, sous la forme :

$$X' = AX \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique :

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 4 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t+1)\underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & t & -1 \\ 1 & 0 & t-3 \end{vmatrix}} = (t+1)\underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & -1 \\ 1 & 1 & t-3 \end{vmatrix}} = (t+1)\big((t-1)(t-3)+1\big)$$

Aussi : $\chi_A(t) = (t+1)(t^2 - 4t + 4) = (t+1)(t-2)^2$. On étudie le sev propre associé à 2 :

$E_2 = \text{Ker}\,(A - 2I_3) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}\,(A - 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 2y = 4x \\ -4x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

OU BIEN :

$\text{rg}(A - 2I_3) \geqslant 2$ (2 colonnes non colinéaires) aussi, par le théorème du rang : $\dim E_2 = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(A - 2I_3) \leqslant 3 - 2 = 1$ donc nécessairement $\neq 2 = m(2)$ la multiplicité de 2. Par ailleurs : $\dim E_2 \geqslant 1$ (car 2 est vp) donc en fait : $\dim E_2 = 1$

$\boxed{\text{La dimension du sev propre associé à 2 n'est pas égale à la multiplicité de 2 : A n'est pas diagonalisable.}}$

2. Montrer que A est semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec α et β des réel à préciser.

Préciser la matrice de passage P (il n'est pas nécessaire d'expliciter P^{-1})

Tout d'abord : si A et T sont semblables, elles doivent avoir le même polynôme caractéristique ce qui impose $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

Ensuite, A et T sont semblables si elles représentent le même endomorphisme f dans des bases différentes. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors on cherche $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ une autre base de $\mathbb{R}^3$ avec $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = T$ ce qui induit $\begin{cases} f(u) = -u \\ f(v) = 2v \\ f(w) = v + 2w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in E_{-1} = \text{Ker}\,(A + I_3) \\ v \in E_2 = \text{Ker}\,(A - 2I_3) \\ Aw = v + 2w \end{cases}$

On sait que $E_{-1} = \text{Ker}\,(A + I_3)$ est de dimension 1 (vp simple) et : $\text{Ker}\,(A + I_3) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \text{Vect}\big((1, -1, 1)\big)$

On pose donc $u = (1, -1, 1)$ et $v = (1, 2, 4)$ (voir question 1) et on cherche $w = (x, y, z)$ avec :

$Aw = 2w + v \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 1 \\ -2y + z = 2 \\ -4x + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + 2x \\ z = 4 + 4x \end{cases}$ Il reste à s'assurer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\det(u, v, w) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 2 & 1+2x \\ 1 & 4 & 4+4x \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 3 & 1+3x \\ 0 & 3 & 4+3x \end{vmatrix}} \neq 0 \Leftrightarrow 3\big(4 + 3x - (1 + 3x)\big) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Pas de contrainte sur x, on choisit $x = 0$ et $\boxed{\text{avec } P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors } P^{-1}AP = T \text{ avec } \alpha = -1 \text{ et } \beta = 2}$

3. Résoudre le système différentiel $\quad \mathrm{Y}' = \mathrm{TY} \quad$ d'inconnues $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des fonctions inconnues supposées dérivables sur $\mathbb{R}$

$\mathrm{Y}' = \mathrm{TY} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = -a \\ b' = 2b + c \\ c' = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} a(t) = \alpha e^{-t} \\ b' = 2b + \gamma e^{2t} \\ c(t) = \gamma e^{2t} \end{cases}$

Pour la seconde équation EDL2 qui a un second membre :

- les solutions homogènes ont pour expression : βe^{2t}
- une solution particulière a pour expression kte^{2t} car 2 est racine simple de l'équation caractéristique $r = 2$:

$ke^{2t} + 2kte^{2t} = 2kte^{2t} + \gamma e^{2t} \Leftrightarrow k = \gamma \quad$ Ainsi : $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} a(t) = \alpha e^{-t} \\ b(t) = \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} \\ c(t) = \gamma e^{2t} \end{cases}$

4. En déduire l'ensemble des solutions de (S) en utilisant le changement de bases : $\quad \mathrm{X} = \mathrm{PY}$.

Puisque P *est une matrice* *à coefficients constants*, *on pourra admettre que* $\quad \mathrm{Y}' = (\mathrm{PX})' = \mathrm{PX}'$

Si $\mathrm{X} = \mathrm{PY}$ où P est la matrice de la question 2, on a : $\quad \mathrm{Y}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AX} = \mathrm{TY}$

d'où, avec la question 3, on a : $\quad \mathrm{X}(t) = \mathrm{PY}(t)$ soit $\boxed{\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} \\ y(t) = -\alpha e^{-t} + 2\beta e^{2t} + 2\gamma t e^{2t} + \gamma e^{2t} \\ z(t) = \alpha e^{-t} + 4\beta e^{2t} + 4\gamma t e^{2t} + 4\gamma e^{2t} \end{cases}}$