

Calculs de déterminants (niveau 2)

EXERCICE N° 5

Calculer les déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ suivants:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} 1) D_n = \\ \hline \end{array}
\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ 0 & 1 & \nearrow & \nearrow & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & \end{array}
\begin{array}{c} 2) D_n = \\ \hline \end{array}
\begin{array}{ccccccc} 1 & n & \cdots & \cdots & n & & \\ n & 2 & \nearrow & \nearrow & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ n & \cdots & \cdots & \cdots & n & & \end{array}
\begin{array}{c} 3) D_n(x) = \\ \hline \end{array}
\begin{array}{ccccccc} x & 1 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ 1 & x & \nearrow & \nearrow & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \nearrow & \nearrow & \nearrow & x & 1 & \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & x & \end{array}
\end{array}$$

1) On développe selon la première colonne:

$$D_n = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} \times 1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\hspace{10cm}}_{\text{avec 2 déterminants triangulaires}}$$

2) On réalise les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_n$ pour $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$D_n = \begin{pmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \text{triangulaire} - (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(n-1)) \times n = (-1)^{n-1} n!$$

3) On commence par réaliser l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \dots + C_n$:

$$D_n(x) = \begin{array}{ccccccc} x+n-1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ x+n-1 & x & & & \vdots & & \\ x+n-1 & 1 & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & x & 1 \\ x+n-1 & 1 & \cdots & 1 & x & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & & \\ 1 & x & & & \ddots & & \\ 1 & 1 & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x & & \end{array}$$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & x-1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & x-1 \end{vmatrix} = \boxed{(x+n-1)(x-1)^{n-1}}$$

EXERCICE N° 6

Soient a et b des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose:

$$a_{i+j} = a+b, \quad a_{ij} = ab \text{ si } j=i+1 \quad a_{ij} = 1 \text{ si } i=j+1 \text{ et } a_{ij} = 0 \text{ sinon}$$

On note $D_n = \det(a_{ij})$. Chercher une relation de récurrence entre D_n , D_{n-1} et D_{n-2} pour $n \geq 3$.

En déduire D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$a+b$	ab	0	$\dots$	0
1	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$
0	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	0
$\vdots$	$\ddots$		$\ddots$	ab
0	$\dots$	0	1	$a+b$

On a: $D_n =$

On commence par développer selon C_1 :

$D_n = (a+b)D_{n-1} + (-1)^{2n+1}$	ab	0	$a+b$	ab	0	$\vdots$	0
	1	$a+b$	ab	0	$\vdots$	0	
	0	1	$a+b$	ab	$\vdots$	0	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	ab	
	0	$\vdots$	$\vdots$	0	1	$a+b$	

puis on développe selon L_1 :

$D_n = (a+b)D_{n-1} - (-1)^{1+1}abD_{n-2}$ Notons que $n \geq 3$ pour permettre au moins 2 développements...

La suite $(D_n)_{n \geq 3}$ suit une relation de récurrence d'ordre 2: $\forall n \geq 3, D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$

ou encore: $\forall n \geqslant, D_{n+2} = (a+b)D_{n+1} - abD_n$

L'équation caractéristique est: $r^2 - (a+b)r + ab = 0 \Leftrightarrow (r-a)(r-b) = 0$. On doit donc envisager deux situations:

Cas n° 1: $a \neq b$ et il y a deux racines distinctes donc $D_n = \alpha a^n + \beta b^n$ et on détermine α et β sur les premiers termes

On calcule: $D_1 = a + b$ et $D_2 = (a + b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2$ aussi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha a + \beta b = a + b \\ \alpha^2 + \beta b^2 = a^2 + ab + b^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(a^2 - ab) = a^2 + ab + b^2 - b(a + b) = a^2 \\ \beta(b^2 - ab) = b^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha(a - b) = a \\ \beta(b - a) = b^2 \end{array} \right.$$

$$\text{soit } ab \neq 0: \alpha = \frac{a}{a-b} \text{ et } \beta = \frac{b}{b-a} \quad \boxed{\text{Si } a \neq b \text{ et } ab \neq 0 \text{ alors } D_n = \frac{a^{n+1}}{a-b} + \frac{b^{n+1}}{b-a}}$$

soit $ab = 0$ (par exemple $b = 0$ quitte à échanger les rôles): $\alpha \equiv 1$ Si $a \neq b$ et $b = 0$ alors $D_n \equiv a^n$

Cas n° 2: $a = b \neq 0$ et il y a une racine double donc $D_n = (\alpha n + \beta) a^n$ et on détermine α et β sur les premiers termes

Cette fois:
$$\begin{cases} \beta = a + b = 2a \\ \alpha + \beta = a^2 + ab + b^2 = 3a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2a \\ \alpha = 3a^2 \end{cases}$$

Si $a = b \neq 0$ alors $D_n = (a(3a - 2))$