PT : Correction du TD 3 sur le chapitre II

Calculs de déterminants (niveau 1)

Exemple n° 12 *Diverses utilisations des déterminants*

1. Dans un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on donne $A(-2,1,1)$, $B(2,2,-1)$ et $C(4,0,3)$. En admettant que c'est le sixième du volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$, calculer le volume du tétraèdre OABC.

$$\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_2\\ L_3\leftarrow L_3-L_2}}{=} -2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -2(9+6) = -2\times 15$$

aussi $\mathcal{V} = \dfrac{|-2\times 15|}{6} = 5$ unité de volume

2. Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(a) $P = 1+X+X^2$, $Q = -1+2X-X^2$ et $R = -1+8X-X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Ces trois vecteurs sont dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3.
Si $\mathscr{B} = (1,X,X^2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\det_{\mathscr{B}}(P,Q,R) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ car deux lignes colinéaires donc (P,Q,R) est liée.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

Si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ alors:

$$\det_{\mathscr{B}}(A,B,C,D) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1\leftarrow C_1-C_4,\\ C_2\leftarrow C_2-C_4\\ C_3\leftarrow C_3-C_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_3}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det_{\mathscr{B}}(A,B,C,D) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+2) = -3 \neq 0$$ donc (A,B,C,D) est libre

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le scalaire a pour que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ soit inversible.

$$\det_A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_3\\ L_2\leftarrow L_2-L_3}}{=} (a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{=}$$

En développant selon C_1: $\det A = (a-1)^2\big(a+1-(-1)\big) = (a-1)^2(a+2)$
A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+2)\neq 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{C}-\{1,-2\}$

4. Avec les notations de la question 2, donner une équation de l'hyperplan dans la base canonique adaptée:

a) $H = \mathrm{Vect}(P,Q)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ b) $H = \mathrm{Vect}(A,B,C)$ dans $M_2(\mathbb{R})$

a) P et Q sont non colinéaires aussi (P,Q) est une base de H et $\dim H = 2 = 3-1 = \dim\mathbb{R}_2[X]-1$ donc H est bien un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$
Si on note $\mathscr{B} = (1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$,

$$R = a+bX+cX^2 \in H \Leftrightarrow (P,Q,R) \text{ liée} \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(P,Q,R) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{} \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & c-a \end{vmatrix} = 0$$

soit: $R = a+bX+cX^2\in H \Leftrightarrow +(c-a)\times(2+1) = 0 \Leftrightarrow c-a = 0$ aussi: $\boxed{H = \left\{a+bX+cX^2 \mid a = c\right\}}$

b) (A,B,C) est libre (sous-famille d'une famille libre) donc H est un sev de dimension 3 et c'est bien un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$ et, en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$, on a: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(A,B,C,M) = 0$
soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_4,\\ L_2\leftarrow L_2-L_4\\ L_3\leftarrow L_3-L_4}}{} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & a-d \\ 0 & -1 & 0 & b-d \\ 0 & 0 & -1 & c-d \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underset{L_4\leftarrow L_4+L_1}{} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & a-d \\ 0 & -1 & 0 & b-d \\ 0 & 0 & -1 & c-d \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H \Leftrightarrow +(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & b-d \\ 0 & -1 & c-d \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underset{L_3\leftarrow L_3+L_1}{} \begin{vmatrix} -1 & 0 & b-d \\ 0 & -1 & c-d \\ 0 & 1 & a+b-d \end{vmatrix} = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H \Leftrightarrow +(-1)\Big(-(a+b-d)-(c-d)\Big) = 0 \text{ soit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H \Leftrightarrow a+b+c-2d = 0$$

Exercice n° 4 On considère trois réels a,b et c et on pose $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (a,b,c)$ et $\vec{w} = (bc,ca,ab)$
Donner une condition nécessaire et suffisante pour $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(u,v,w)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \neq 0$$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Pour conclure, il faudra résoudre $\det_{\mathscr{B}}(u,v,w) = 0$ aussi nous avons intérêt à rechercher une expression factorisée du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix}$$

en factorisant $b-a$ sur L_2 et $c-a$ sur L_3 en développant selon C_1

De sorte que finalement: $\det_{\mathscr{B}}(u,v,w) = (b-a)(c-a)(c-b)$ et par suite:
$\det_{\mathscr{B}}(u,v,w) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = c$ ou $b = c$ donc $\det_{\mathscr{B}}(u,v,w)\neq 0 \Leftrightarrow a\neq b$ et $a\neq c$ et $b\neq c$
de sorte que, finalement: $\boxed{(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \text{ base de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow a,b,c \text{ sont deux à deux distincts.}}$

Exercice n° 7 Pour a,b et c des paramètres réels, on définit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par:

$$f(x,y,z) = \big(ax+ay+az,\ ax+by+bz,\ ax+by+cz\big)$$

Donner la matrice A canoniquement associée à f et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme.

Puisque f est un endomorphisme, f est un automorphisme lorsque f est inversible $\Leftrightarrow \det(f)\neq 0$
On calcule $\det(f)$ par $\det(f) = \det M$ où M est une matrice de f dans une base quelconque de $\mathbb{R}^3$.
Ici, on nous propose de déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$

<u>Méthode 1</u>: $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),f(e_2),f(e_3)\big) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ car $\begin{cases} f(e_1) = f(1,0,0) = (a,a,a) \\ f(e_2) = f(0,1,0) = (a,b,b) \\ f(e_3) = f(0,0,1) = (a,b,c) \end{cases}$

<u>Méthode 2</u>: Si A est canoniquement associé à f alors: $y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} ax+ay+az \\ ax+by+bz \\ ax+by+cz \end{pmatrix}$

Or a: $\begin{pmatrix} ax+ay+az \\ ax+by+bz \\ ax+by+cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ aussi $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$

On calcule $\det f = \det A$ sous une forme factorisée pour pouvoir résoudre $\det f = 0$:

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\ C_3\leftarrow C_3-C_1\\ \text{Facteur } a \text{ dans } C_1}}{=} a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b-a \\ 1 & b-a & c-a \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{dev selon } L_1\\ \text{Facteur } b-a \text{ dans } C_2}}{=} a(b-a)\begin{vmatrix} 1 & b-a \\ 1 & c-a \end{vmatrix}$$

d'où $\det f = \det A = a(b-a)\big((c-a)-(b-a)\big) = a(b-a)(c-b)$
Aussi: $\det f = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = b$ ou $b = c$ puis $\boxed{f \text{ est un automorphisme} \Leftrightarrow \det f\neq 0 \Leftrightarrow a\neq 0 \text{ et } a\neq b \text{ et } b\neq c}$