EXEMPLE 5 *Diverses utilisations des déterminants*

1. Dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on donne les points $A(-3, 11)$, $B(3, 3, 1)$ et $C(9, 0, 3)$.
   Déterminer le volume du tétraèdre OABC en admettant que c'est le sixième du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$

   Le volume du parallélépipède est la valeur absolue du déterminant des 3 vecteurs. On calcule donc :
   $$D = \det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{en factorisant par 3 dans } L_1 \text{ et } C_3$$
   Puis avec $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$: $D = 3^2 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3^2 \times -2 \times (3 \times 1 - 0)$ en développant suivant L_1

   Finalement, le volume cherchée est $V = \dfrac{|3^2 \times -2 \times 3|}{6} = 9\ u.v.$

   u.v. signifie *unité de volume* : c'est le volume étalon du parallélépipède contruit sur $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ dans le repère.

2. Donner une équation dans la base canonique de l'hyperplan $H = \text{Vect}(1 + X, 1 + X + X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$

   La famille génératrice de H est libre (car à degrés échelonnés) donc c'est une base de H
   Alors : $\dim H = 2 = \dim \mathbb{R}_2[X] - 1$ donc H est bien un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$.
   Il est caractérisé par une équation linéaire non triviale dans la base canonique $\mathscr{B} = (1, X; X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$
   On cherche donc une CNS sur (a, b, c) pour que $P = a + bX + cX^2$ appartienne à H :
   $$P = a + bX + cX^2 \in H \Leftrightarrow (1 + X, 1 + X + X^2, P) \text{ est liée} \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(1 + X, 1 + X + X^2, P) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = 0$$
   $$\text{Or : } \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-b \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = +(a - b) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a - b \text{ en développant selon } L_1$$
   Ainsi : $\boxed{P = a + bX + cX^2 \in H \Leftrightarrow a = b}$

3. Prouver que les vecteurs $\vec{u} = (a, -a, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, a, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 0, a)$ et $\vec{t} = (1, 1, 1, 1)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $a \neq 0$

   $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\right)$ est libre $\Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\right) \neq 0$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$
   $$D = \det_{\mathscr{B}}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\right) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ -a & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -a & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec } L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \text{ puis en factorisant par } a \text{ dans } L_1$$
   soit, avec $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$: $D = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & a & 1-a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a \times (+1) \begin{vmatrix} a & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}$ en développant selon L_1

   puis avec $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ $D = a \begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = a \times (-1) \begin{vmatrix} a & -a \\ 1 & a-1 \end{vmatrix}$ en développant selon L_2

   Pensez à factoriser et à faire apparaître un maximum de 0 avant de développer !
   aussi : $D = -a\left(a^2 - a + a\right) = -a^3$ soit : $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}\right)$ est libre $\Leftrightarrow -a^3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

4. Donner une CNS sur les paramètres a et b pour que $A = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{pmatrix}$ soit inversible

On sait que : A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Mais :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} = (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$$ avec $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ puis en factorisant par $3a+b$ dans L_1

En toute rigueur, $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ devrait se décomposer en 3 étapes : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$ mais il est d'usage de le faire en une étape. **Bien souvent la sommation de toutes les lignes ou de toutes les colonnes peut faire apparaître un facteur commun!**

On réalise ensuite les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$:

$$\det(A) = (3a+b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ b & a-b & a-b & a-b \end{vmatrix}$$ On peut alors factoriser par $b-a$ dans les colonnes C_2, C_3 et C_4

$$\det(A) = (3a+b)(b-a)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (3a+b)(b-a)^3 \times (+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$ en développant selon L_1

puis en développant selon L_2 : $\det(A) = (3a+b)(b-a)^3 \times (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (3a+b)(b-a)^3$

Finalement : A est inversible $\Leftrightarrow b \neq a$ et $b \neq -3a$

EXERCICE N° 8.5 Pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, justifier que $E = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M + M^T = 2\mathrm{Tr}(M) I_n\right\}$ est un espace vectoriel et préciser sa dimension

• On vérifie d'abord que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$: $E \subset M_n(\mathbb{R})$, $E \neq \varnothing$ car $0 \in E$ puisque : $0 + 0 = 2 \times 0 \times I_n$ et E est stable par combinaison linéaire : soit $(M,N) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, vérifions que $\alpha M + N \in E$

$$\begin{aligned}(\alpha M + N) + (\alpha M + N)^T &= \alpha M + N + \alpha M^T + N^T \text{ par linéarité de la transposition} \\ &= \alpha(M + M^T) + (N + N^T) = \alpha 2\mathrm{Tr}(M) I_n + 2\mathrm{Tr}(N) I_n = 2\big(\alpha \mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(N)\big) I_n \text{ car } M \in E \text{ et } N \in E \\ &= 2\mathrm{Tr}(\alpha M + N) I_n \text{ par linéarité de la trace}\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien vérifié que $\alpha M + N \in E$. En conséquence, E est un sev de $M_n(\mathbb{R})$ c'est donc aussi un espace vectoriel.

• Déterminons désormais dim E :

Si $M \in E$: $M + M^T = 2\mathrm{Tr}(M) I_n \Rightarrow \mathrm{Tr}(M + M^T) = \mathrm{Tr}\big(2\mathrm{Tr}(M) I_n\big) \Rightarrow \underbrace{\mathrm{Tr}(M) + \mathrm{Tr}(M^T)}_{2\mathrm{Tr}(M)} = \underbrace{2\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(I_n)}_{2n\mathrm{Tr}(M)} \Rightarrow 2\mathrm{Tr}(M) = 2n\mathrm{Tr}(M)$

Ainsi : $M \in E \Rightarrow 2(n-1)\mathrm{Tr}(M) = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0$ puisque $n \neq 1$ mais alors $M + M^T = 2 \times 0 \times I_n = 0$ soit $M^T = -M$

On vient donc de justifier que : $E \subset A_n(\mathbb{R})$ où $A_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques

Réciproquement : si $M \in A_n(\mathbb{R})$ alors $M + M^T = 0$ mais aussi $\mathrm{Tr}(M) = 0$ donc on a bien $M + M^T = 2\mathrm{Tr}(M) I_n$ soit $M \in E$

Finalement, E est l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$ qui est un sev de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$

<u>Rappel</u> : $A_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\Big(E_{ij} - E_{ji} \;\Big|\; 1 \leqslant i < j \leqslant n\Big)$ et on obtient la dimension en comptant le nombre de vecteurs de la bases : $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1) \times (n-1+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

EXERCICE 4 On considère trois réels a, b et c et on pose $\vec{u} = (a, a, c)$, $\vec{v} = (b, c, b)$ et $\vec{w} = (ab, ac, bc)$.
Donner une CNS pour que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille de trois vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$ de dimension trois aussi :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ soit une base de } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0 \text{ où } \mathscr{B} \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^3$$

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & c & a \\ c & b & bc \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a-c & 0 & b(a-c) \\ a & c & 0 \\ c & b & bc \end{vmatrix}}_{\text{avec } L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \underbrace{= (a-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ a & c & 0 \\ c & b & bc \end{vmatrix}}_{\text{en factorisant } a-c \text{ dans } L_1} = (a-c) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c & -b \\ c & b & 0 \end{vmatrix}}_{\text{avec } C_3 \leftarrow C_3 - aC_1}$$

Lorqu'il y a un 1 ou un -1 dans une ligne/colonne, on peut facilement faire disparaître tous les coefficients de la ligne/colonne

En développant selon L_1 : $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (a-c) \times (+1) \begin{vmatrix} c & -b \\ b & 0 \end{vmatrix} = (a-c) \times b^2$

Ainsi : $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow a \neq c$ et $b \neq 0$

EXERCICE N° 5 Calculer les déterminants d'ordre $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ suivant :

$$1)\ D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1} + (-1)^{1+n} \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1}$$

en développant selon la ligne L_1.

Ce déterminant n'est pas un tri-bande (à cause du 1 en position (1,n) mais il lui ressemble beaucoup...

Les deux déterminants d'ordre $n-1$ sont des déterminants triangulaires qui valent le produit des coefficients de leurs diagonales : $D_n = 2^{n-1} + (-1)^{1+n} \times (-1)^{n-1} = 2^{n-1} + (-1)^{2n} = 2^{n-1} + 1$

$$2)\ D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ & \ddots & \ddots & \vdots & \\ ? & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & -1 & n \end{vmatrix}$$

en réalisant les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_n$ pour $j \in [\![1, n-1]\!]$

Alors, en développant selon L_1 : $D_n = (-1)^{n+1} \times \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ ? & & \ddots & 0 \\ & & & -1 \end{vmatrix}}_{\text{d'ordre } n-1} = (-1)^{n+1} \times (-1)^{n-1} = (-1)^{2n} = 1$

puisque ce déterminant d'ordre $n-1$ est triangulaire inférieur.

<u>Autre méthode</u> : Avec l'opération $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$ d'où, en développant selon C_n :

$D_n = (-1)^{n+n} \times D_{n-1} = D_{n-1}$ puisqu'en effet, le mineur en position (n, n) permet de retrouver le même déterminant mais à l'ordre $n-1$ donc c'est D_{n-1}. En itérant, on obtient :

$D_n = D_{n-1} = D_{n-2} = \dots = D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ soit $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, D_n = 1$

2.5) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Pour $n \geqslant 3$, on développe d'abord selon la ligne 1 obtenant un somme de 2 déterminants d'ordre $n-1$:

$D_n = 2 \times D_{n-1} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2D_{n-1} + (-1)D_{n-2}$ en développant selon C_1 le second déterminant.

La suite (D_n) suit alors une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $\forall n \geqslant 3,\ D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$

(en posant $k = n-2$) $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*,\ D_{k+2} - 2D_{k+1} - 2D_k = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^2$ a une racine double $r = 1$ aussi :

$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N} D_n = (An + B) \times 1^n$ et on détermine A et B à l'aide des calculs de D_1 et D_2

$\begin{cases} D_1 = 2 \\ D_2 = 2 \times 2 - (-1)(-1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ 2A + B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 - A \\ A + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 1$ d'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = n + 1$

3) Calculer $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$

On développe selon la première ligne :

$D_n(x) = +x \times D_{n-1}(x) + (-1)^{n+1}(n-1) \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x \\ n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$

On développe le second déterminant (d'ordre $n-1$) selon la première colonne :

$D_n(x) = xD_{n-1}(x) + (-1)^{n+1}(n-1) \times (-1)^n (n-1) \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = xD_{n-1}(x) - (n-1)^2 x^{n-2}$

En itérant :

$D_n(x) = x\left(xD_{n-2}(x) - (n-2)^2 x^{n-3}\right) - (n-1)^2 x^{n-2} = x^2 D_{n-2}(x) - \left((n-1)^2 + (n-2)^2\right) x^{n-2}$

puis :

$D_n(x) = x^2\left(xD_{n-3}(x) - (n-3)^2 x^{n-4}\right) - \left((n-1)^2 + (n-2)^2\right) x^{n-2} = x^3 D_{n-3}(x) - \left((n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2\right) x^{n-2}$

Ainsi :

$D_n(x) == \dots = x^{n-2} D_2 - \left(\sum_{k=2}^{n-1} k^2\right) x^{n-2} = x^{n-2}(x^2 - 1) - \left(\sum_{k=2}^{n-1} k^2\right) x^{n-2} = x^n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) x^{n-2} = x^n - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} x^{n-2}$