PT : Correction du TD n°3 sur le chapitre X

Exercice n° 7 Montrer que l'équation $t^2y''+4ty'+(2-t^2)y=1$ admet une unique solution développable en série entière au voisinage de 0 qu'on déterminera.

On cherche une solution de la forme $y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ où $\sum a_n t^n$ est une SE de rayon de convergence $R>0$

Par dérivation terme à terme, on a, sur $]-R,R[$: $y'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et $y''(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$

Sur $]-R,R[$:

$$t^2y''(t)+4ty'(t)+(2-t^2)y(t)=1 \Leftrightarrow t^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nt^{n-2}\right)+4t\left(\sum_{n=0}^{+\infty} na_nt^{n-1}\right)+(2-t^2)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nt^n+\sum_{n=0}^{+\infty} 4na_nt^n+\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_nt^n-\sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^{n+2}=1$$

On pose $k=n+2$ dans la dernière somme et $k=n$ dans les autres :

$$t^2y''(t)+4ty'(t)+(2-t^2)y(t)=1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)a_kt^k+\sum_{k=0}^{+\infty} 4ka_kt^k+\sum_{k=0}^{+\infty} 2a_kt^k-\sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-2}t^k=1$$

On isole les termes $k=0$ et $k=1$ puis on regroupe toutes les sommes ACV en une seule :

$$t^2y''(t)+4ty'(t)+(2-t^2)y(t)=1 \Leftrightarrow 0+4a_1t+2a_0+2a_1t+\sum_{k=2}^{+\infty}\left[k(k-1)a_k+4ka_kt^k+2a_k-a_{k-2}\right]t^k=1$$

• On identifie alors les coefficients à cause de l'unicité du DSE :

$$t^2y''(t)+4ty'(t)+(2-t^2)y(t)=1 \Leftrightarrow \underbrace{2a_0=1}_{\text{terme } k=0},\quad \underbrace{6a_1=0}_{\text{terme } k=1} \quad\text{et}\quad \forall k\in\mathbb{N}-\{0,1\},\underbrace{(k^2+3k+2)}_{=(k+2)(k+1)\neq 0}a_k-a_{k-2}=0$$

$$\Leftrightarrow a_0=\frac{1}{2},\ a_1=0 \text{ et } \forall k\in\mathbb{N}-\{0,1\},\quad a_k=\frac{1}{(k+1)(k+2)}a_{k-2}\ (*)$$

Vu que $a_1=0$ et la relation de récurrence à l'ordre 2, il est clair que : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{2n+1}=0$.

Ainsi : $y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}t^{2n}$ est une série entière lacunaire dont on précise le rayon de convergence avec la règle de d'Alembert :

$u_n=a_{2n}t^{2n}\neq 0$ si $t\neq 0$ et alors : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\dfrac{|a_{2n+2}t^{2n+2}|}{|a_nt^{2n}|}=\left|\dfrac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right|t^2=_{\text{avec }(*)\text{ pour }k=2n+2}\dfrac{t^2}{(2n+4)(2n+3)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

donc la série CVA pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $R=+\infty$

On peut donc conclure à l'existence d'une solution développable en série entière sur $\mathbb{R}$ de cette équation et celle-ci est uniquement déterminé puisqu'on connaît $a_0=\frac{1}{2}$ et la relation $(*)$ qui permet d'obtenir la suite (a_{2n})

• Explicitons le coefficient a_{2n} pour $n\in\mathbb{N}$:

$$a_{2n}=\underbrace{\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}}_{(*)\text{ avec }k=2n}a_{2n-2}=\underbrace{\frac{1}{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)}}_{(*)\text{ avec }k=2n-2}a_{2n-4}=\cdots=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)\times\cdots\times 4\times 3}a_0=\frac{2}{(2n+2)!}\times\frac{1}{2}$$

Ainsi : $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+2)!}t^{2n}$

• On explicite $y(t)$ à l'aide des fonctions usuelles :

$R=+\infty$ nous invite à chercher dans la famille de l'exponentielle et, puisqu'il n'y a que des termes d'indices pairs, on cherche du côté de cos et ch

D'après le cours : $\forall t\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k)!}t^{2k}$

$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+2)!}t^{2n}$

Pour $t\neq 0$: $t^2y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^{2n+2}}{(2n+2)!}=_{k=n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{t^{2k}}{(2k)!}=\mathrm{ch}(t)-1$ soit $\boxed{y(t)=\dfrac{\mathrm{ch}\,t-1}{t^2}\text{ si }t\neq 0\text{ et }y(0)=\dfrac{1}{2}}$

Exercice n° 8 En utilisant une équation différentielle au 2nd ordre vérifiée par f, déterminer le développement en série entière en 0 de $f=[x\mapsto(\mathrm{Arcsin}\,x)^2]$

Par produit, la fonction f est C^∞ sur $]-1,1[$ et, pour $x\in]-1,1[$:

$f'(x)=2\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ puis $f''(x)=\dfrac{2}{(\sqrt{1-x^2})^2}+2\mathrm{Arcsin}(x)\times-\dfrac{1}{2}\times-2x\times\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

On remarque que : $f''(x)=\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{xf'(x)}{1-x^2}$ puis $(1-x^2)f''(x)=2+xf'(x)$

La fonction f est donc solution du problème de Cauchy : (P) : $\begin{cases}(1-x^2)y''-xy'=2\ (E)\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$

On cherche alors une solution DSE de ce problème sous la forme $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de rayon de convergence $R>0$.

Par dérivation termes à termes, pour $x\in]-R,R[$: $y'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ et $y''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)=2\Leftrightarrow(1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}=2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n=2$$

On pose $k=n-2$ dans la première somme et $k=n$ dans les deux autres sommes. Pour ces deux dernières sommes, on peut commencer à indicer la somme à $k=0$ car les termes ajoutés sont nuls.

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)=2\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k-\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)a_kx^k-\sum_{k=0}^{+\infty}ka_kx^k=2$$

Toutes les sommes étant convergentes, on peut utiliser la linéarité :

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)=2\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\Big((k+2)(k+1)a_{k+2}-k(k-1)a_k-ka_k\Big)x^k=2$$

On utilise alors l'unicité du DSE pour identifier les coefficients :

$$(1-x^2)y''(x)-xy'(x)=2\Leftrightarrow 2a_2=2\quad\text{et}\quad\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \underbrace{(k+2)(k+1)}_{\neq 0}a_{k+2}-k^2a_k=0$$

Ainsi, avec les conditions initiales, on sait que $a_0=y(0)=0,\quad a_1=y'(0)=0$

Finalement, on a obtenu : $\boxed{a_0=a_1=0,\quad a_2=1\quad\text{puis}\quad\forall k\in\mathbb{N}^*,\ a_{k+2}=\dfrac{k^2}{(k+1)(k+2)}a_k\ (*)}$

La récurrence d'ordre 2 amène à distinguer le calcul de a_{2p} et de a_{2p+1} pour $p\in\mathbb{N}$:

Puisque $a_1=0$, on obtient facilement, par récurrence que : $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0}$

Attention, $a_0=0$ n'entraîne pas que $a_{2p}=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ car la relation $(*)$ ne peut pas être utilisée pour $k=0$.

Calcul du rayon de convergence :

On a vu que $y(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}a_{2p}x^{2p}$ avec a_{2p} donné par $(*)$

Le rayon de convergence s'obtient par la règle de d'Alembert :

$$\frac{|a_{2p+2}x^{2p+2}|}{|a_{2p}x^{2p}|}=\underbrace{\frac{(2p)^2}{(2p+1)(2p+2)}}_{\text{avec }(*)\text{ où }k=2p}|x|^2\sim_{p\to+\infty}|x|^2\text{ d'où }\begin{cases}\text{si }|x|<1,\text{ CVA et donc }R\geqslant 1\\ \text{si }|x|>1,\text{ DVG et donc }R\leqslant 1\end{cases}\text{ de sorte que } R=1>0$$

Expression des coefficients :

$$\text{Ensuite : } a_{2p+2}=\underbrace{\frac{(2p)^2}{(2p+2)(2p+1)}}_{\text{avec }(*)\text{ où }k=2p}a_{2p}=\underbrace{\frac{(2p)^2\big(2(p-1)\big)^2}{(2p+2)(2p+1)(2p)(2p-1)}}_{\text{avec }(*)\text{ où }k=2p-2}a_{2p-2}=\underbrace{\frac{(2p)^2\big(2(p-1)\big)^2\times\cdots\times(2\times1)^2}{(2p+2)(2p+1)\ldots4\times3}}_{\text{Attention, on itère jusqu'à }a_2\text{ et pas }a_0\,!}a_2$$

soit : $a_{2p+2}=\dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+2)!}\times 2$ pour $p\in\mathbb{N}$ ou encore $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ a_{2p}=\dfrac{2^{2p-1}\big((p-1)!\big)^2}{(2p)!}\quad(*)$

Conclusion :

Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on a : $\boxed{\forall x\in]-1,1[,\quad(\mathrm{Arcsin}\,x)^2=\sum_{p=1}^{+\infty}\dfrac{2^{2p-1}\big((p-1)!\big)^2}{(2p)!}x^{2p}}$