MÉTHODE : **Calculer la distance d'un vecteur à un sev**

Si F est un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$ et x un vecteur de E alors

$$d(x,F) = \|x - p(x)\| \quad \text{où } p(x) \text{ est la projection orthogonale de } x \text{ sur } F$$

Il s'agit donc de déterminer $p(x)$. On dispose pour cela de plusieurs méthodes :

Méthode « utilisant une BON de F » On commence par déterminer une BON $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F (le plus souvent en orthonormalisant une base quelconque de F) et on sait alors que $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$

Défaut : calcul fastidieux pour l'application de Gram-Schmidt si $n = \dim F$ est trop grand

Avantage : une fois la BON déterminée, on peut calculer facilement une autre projection orthogonal

Conseil : à privilégier si on vous a fait déterminer une BON auparavant

Méthode « utilisant une BON de $F^\perp$ » Si F est un hyperplan, on calcule $p(x) = p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$ et $d(x,F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$

En effet, $F^\perp$ est une droite vectorielle et il suffit donc de trouver un vecteur $\vec{n}$ unitaire normal à F pour obtenir une base orthonormée de $F^\perp$: $p(x) = x - < x, \vec{n} > \vec{n}$ et $d(x,F) = |< x, \vec{n} >|$

Méthode « utilisant la caractérisation de la projection orthogonale » On utilise $y = p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$

Il est à noter que, si on connaît une base $(u_1, \dots, u_n)$ de F quelconque alors

$$y \in F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n) \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad \text{et} \quad x - y \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x-y, u_1 \rangle = 0 \\ \langle x-y, u_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle x-y, u_n \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y, u_1 \rangle = \langle x, u_1 \rangle \\ \langle y, u_2 \rangle = \langle x, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, u_n \rangle = \langle x, u_n \rangle \end{cases}$$

de sorte qu'on obtient les inconnues $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ comme solution d'un système de n équations à n inconnues.

Défaut : on doit refaire une nouvelle résolution pour chaque projection orthogonale calculée

Avantage : il n'est pas nécessaire d'avoir une BON de F..ni même de base de F (voir rédaction nº 3 de l'exercice)

Conseil : cette méthode est, en général, plus performante sauf si on connaît déjà une BON de F

EXERCICE Nº 3 Dans $\mathbb{R}^n$, déterminer la distance du vecteur $x = (1, 0, 0, \dots, 0)$ à $H = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + x_n = 0\}$

On travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ munit du produit scalaire usuel.

H est caractérisée dans $\mathbb{R}^n$ par une équation linéaire $x_1 + x_n = 0$ non triviale où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées dans la base canonique. On peut donc conclure que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ autrement dit que $\dim H = n - 1$ et $\dim H^\perp = 1$

Rédaction la plus rapide On connaît une équation de H dans une base orthonormée : H : $x_1 + x_n = 0$ donc le vecteur $(1, 0, \dots, 0, 1)$ est normal à l'hyperplan H et $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \dots, 0, 1)$ est alors normal et unitaire à H.

On sait alors que $d(x,H) = \|p_{H^\perp}(x)\|$ où $p_{H^\perp}(x)$ est la projection orthogonale de x sur $H^\perp$

Or, $(\vec{n})$ forme une base orthonormée de $H^\perp$ donc $p_{H^\perp}(x) = (x.\vec{n})\vec{n}$ et par suite : $d(x,H) = |x.\vec{n}| = \left| 1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Remarque : on peut préciser la projection orthogonale sur H d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ quelconque :

$$p_H(x) = x - p_{H^\perp}(x) = x - (x.\vec{n})\vec{n} = (x_1, \dots, x_n) - \frac{x_1 + x_n}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \dots, 0, 1) = \left(\frac{x_1 - x_n}{2}, x_2, \dots, x_{n-1}, \frac{x_n - x_1}{2} \right)$$

EXERCICE Nº 1 *Les questions 1. et 2. de cet exercice ont été traité dans le cours*

Dans l'espace $E = \left\{ f \in C^0\big([0, +\infty[, \mathbb{R}\big) \mid f^2 \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[\right\}$ munit du produit scalaire $< f, g > = \int_0^{+\infty} f(t) g(t) \mathrm{d}t$

démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Il s'agit d'une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|< f, g >| \leqslant \|f\| \times \|g\|$ pour $(f, g) \in E^2$

On l'applique ici à $f = [t \mapsto e^{-t}]$ et $g = \left[t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right]$

f est bien dans E car $f^2 = [t \mapsto e^{-2t}]$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$ (fonction exponentielle de référence avec $\alpha = 2 > 0$)

g est bien dans E car $g^2 = \left[t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2} \right]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (elle y est continue et que $g^2(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^2}$ or $\left[t \mapsto \dfrac{1}{t^2} \right]$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$)

De plus : $< f, g > = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, $\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t} \mathrm{d}t} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

et $\|g\| = \sqrt{< g, g >} = \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}} = \sqrt{\left[\text{Arctan}\, t \right]_0^{+\infty}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Dès lors : $|< f, g >| \leqslant \|f\| \times \|g\| \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

EXERCICE N° 2 (suite de l'exercice n°2)

On rappelle que E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $[0,1]$ à valeurs réelles : $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$

et qu'on a munit E du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^1 \big(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\big)\mathrm{d}t$

3. Prouver que $F=\{f\in E \mid f(0)=f(1)=0\}$ et $G=\{f\in E\mid f''=f\}$ sont des supplémentaires orthogonaux

Il s'agit de vérifier que :
a) F et G sont des sev de E
b) F et G sont orthogonaux
c) F et G sont supplémentaires soit $F\oplus G = E$
Pas de caractérisation de la supplémentarité avec les dimensions car E n'est pas de dimension finie
On prouve a) et b) avant c) car : b) $\Rightarrow$ les sev F et G sont en somme directe
Ainsi, avec a) et b), on a déjà : $F\oplus G\subset E$ et il s'agit de faire un raisonnement en analyse/synthèse pour obtenir $E\subset F\oplus G$

Pour a) : On vérifie que F et G sont des sev de E
- soit en revenant à la définition : F et G inclus dans E et non vide vérifiant une stabilité par combinaison linéaire
- soit, pour F, en remarquant : $F=\mathrm{Ker}\,\Phi$ où Φ est l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}^2$ avec $\Phi(f)=\big(f(0),f(1)\big)$
- soit, pour G, en remarquant que : $g\in G \Leftrightarrow g''=g \Leftrightarrow g$ solution de $y''=y$ d'équation caractéristique $r^2=1\Leftrightarrow r=\pm1$
donc : $g\in G\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2, \forall t\in[0,1], g(t)=ae^t+be^{-t} \Leftrightarrow g\in \mathrm{Vect}\big([t\mapsto e^t],[t\mapsto te^t]\big)$
Ainsi $G=\mathrm{Vect}\big([t\mapsto e^t],[t\mapsto te^t]\big)$ dans E est bien un sev de E

Pour b) : On doit prouver : F et G orthogonaux $\Leftrightarrow \forall (f,g)\in F\times G,\ \langle f,g\rangle = 0$

$$\langle f;g\rangle = \int_0^1\big(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\big)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t = \underbrace{[f(t)g'(t)]_0^1}_{=0 \text{ car } f(0)=f(1)=0} - \int_0^1 g'(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t = 0+0=0$$

par une IPP sur la 1er intégrale avec $\begin{cases} u(t)=f(t) & u'(t)=f'(t)\\ v(t)=g'(t) & v'(t)=g''(t)=g(t)\end{cases}$ où u et v sont C^1 sur $[0;1]$ puisque f et g y sont C^2

Pour c) : Il reste dont à prouver $F+G\subset E$ autrement dit que toute fonction h de E se décompose en $h=f+g$ où f est une fonction de F et g est une fonction de G

Analyse : g est d'expression $g(t)=ae^t+be^{-t}$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ mais, si $h=f+g$, on obtient pour $t=0$ et $t=1$: $h(0)=a+b$ et $h(1)=ae+be^{-1}$ soit $a=\dfrac{h(0)e^{-1}-h(1)}{e^{-1}-e}=\dfrac{h(0)-eh(1)}{1-e^2}$ et $b=\dfrac{h(1)-eh(0)}{e^{-1}-e}=\dfrac{eh(1)-e^2h(0)}{1-e^2}$

Synthèse : On définit g par $g(t)=\dfrac{h(0)-eh(1)}{1-e^2}e^t+\dfrac{eh(1)-e^2h(0)}{1-e^2}e^{-t}$ et f par $f=h-g$.
On vérifie alors que : $h=f+g$, $g\in G$ et $f\in F$ puisque a et b ont été choisi pour vérifier $f(0)=f(1)=0$
On a donc bien obtenu une décomposition $h=f+g$ où $f\in F$ et $g\in G$ pour $h\in E$ quelconque.
En définitive : $E\subset F+G\subset E \Leftrightarrow E=F+G$.

4. Préciser le projeté orthogonal d'une application h de E sur G

On a $E=F\oplus G$ et F et G sont orthogonaux donc $F=G^\perp$ Par définition, la projection orthogonale sur G d'une fonction h de E s'obtient à partir de la décomposition : $h=f+g\in G^\perp\oplus G=E$ et vaut g

La projection orthogonale de h sur G est la fonction $g=[t\mapsto at+b]$ où $a=\dfrac{h(0)-eh(1)}{1-e^2}$ et $b=\dfrac{eh(1)-e^2h(0)}{1-e^2}$

EXEMPLE N° 2 Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E,\langle .,.\rangle)$,
Montrer que : $F\oplus F^\perp = E \Rightarrow (F^\perp)^\perp = F$ *Cela sera en particulier vérifié si* F *est de dimension finie*

• On sait déjà, par définition d'un orthogonale que : $F\subset (F^\perp)^\perp$
En effet : si $x_F\in F$ alors, pour tout $y\in F^\perp$: $\langle x_F,y\rangle=0$ aussi $x_F\in\{x\in E\mid \forall y\in F^\perp, \langle x,y\rangle =0\}=(F^\perp)^\perp$
• Prouvons l'autre inclusion à savoir $(F^\perp)^\perp\subset F$
On se donne donc $x\in(F^\perp)^\perp$ autrement dit tel que : $\forall y\in F^\perp, \langle x,y\rangle=0$
On veut prouver que $x\in F$. Or, on sait que : $E=F\oplus F^\perp$ donc on écrit $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in F$ et $x_2\in F^\perp$
Comme $x_2\in F^\perp$, $\langle x,x_2\rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{\langle x_1,x_2\rangle}_{=0 \text{ car } x_1\in F \text{ et } x_2\in F^\perp} +\|x_2\|^2=0$ par bilinéarité vu que $x=x_1+x_2$
$\Rightarrow 0+\|x_2\|^2=0\Rightarrow \|x_2\|=0\Rightarrow x_2=0$ et ainsi : $x=x_1+0=x_1\in F$

EXEMPLE N° 7 Déterminer $\inf\left\{\int_0^{\pi}(t-a\cos t-b\sin t)^2\mathrm{d}t \mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

Cohérence de la question posée Tout d'abord, $[t\mapsto (t-a\cos t-b\sin t)^2]$ est continue sur $[0,\pi]$ donc l'intégrale$\mathrm{I}_{a,b}=\int_0^{\pi}(t-a\cos t-b\sin t)^2\mathrm{d}t$ existe et, par positivité de l'intégrale, $\mathrm{I}_{a,b}\geqslant 0$.

Aussi, cette borne inférieure existe car $\{\mathrm{I}_{a,b}\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée (par 0).

Interprétation en terme de distance : Dans un espace préhilbertien $(\mathrm{E},\langle .,.\rangle)$,

la distance d'un vecteur x à un sev F de dimension finie est $d(x,\mathrm{F})=\inf\{\|x-y\|\mid y\in\mathrm{F}\}$

On sait aussi que $d(x,\mathrm{F})=\|x-p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale sur F de x.

Ici, on travaille dans l'espace euclidien $\mathrm{E}=\mathrm{C}^0\big([0,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_0^{\pi}f(t)g(t)\mathrm{d}t$

On définit le vecteur $x=[t\mapsto t]$ et le sev $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(\cos,\sin)=\left\{f_{a,b}=[t\mapsto a\cos t+b\sin t]\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

de sorte que : $\mathrm{I}_{a,b}=\int_0^{\pi}\big(t-(a\cos t+b sin t\big)^2\mathrm{d}t=\|x-f_{a,b}\|^2$ puis $\inf\{\mathrm{I}_{a,b}\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\}=d(x,\mathrm{F})^2=\|x-p(x)\|^2$

Calcul de la projection orthogonale : On peut utiliser deux méthodes pour déterminer $p(x)$

- soit on commence par déterminer une base orthonormée (e_1,e_2) de F et on sait que : $p(x)=\langle x,e_1\rangle\, e_1+\langle x,e_2\rangle\, e_2$

Or : $\langle\cos,\sin\rangle=\int_0^{\pi}\cos t\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{4}(1-1)=0$ donc $(\cos,\sin)$ est orthogonale.

$\|\cos\|^2=\int_0^{\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{\cos(2t)+1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}+t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$ d'où $e_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos$

$\|\sin\|^2=\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$ d'où $e_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos$

$\langle x,e_1\rangle=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}t\cos t\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left([t\sin t]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}[-\cos t]_0^{\pi}=-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

$\langle x,e_2\rangle=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left([-t\cos t]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t\mathrm{d}t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\pi+[\sin t]_0^{\pi}\right)=\sqrt{2\pi}$

Ainsi : $p(x)=-\frac{4}{\pi}\cos+2\sin$

- soit on utilise $y=p(x) \Leftrightarrow \underbrace{y\in\mathrm{F}}_{(1)}$ et $\underbrace{x-y\in\mathrm{F}^{\perp}}_{(2)}$

Or : (1) $\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in[0,\pi],\ y(t)=a\cos t+b\sin t$ et : (2) $\Leftrightarrow \big\langle x-y,\cos\big\rangle=0=\big\langle x-y,\sin\big\rangle$

$\big\langle x-y,\cos\big\rangle=0\Leftrightarrow\int_0^{\pi}(t-a\cos t-b\sin t)\cos t\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow\underbrace{\int_0^{\pi}t\cos t\mathrm{d}t}_{=-2}-a\underbrace{\int_0^{\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t}_{=\frac{\pi}{2}}-b\underbrace{\int_0^{\pi}\sin t\cos t\mathrm{d}t}_{=0}=0\Leftrightarrow a=-\frac{4}{\pi}$

$\big\langle x-y,\sin\big\rangle=0\Leftrightarrow\int_0^{\pi}(t-a\cos t-b\sin t)\sin t\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow\underbrace{\int_0^{\pi}t\sin t\mathrm{d}t}_{=\pi}-a\underbrace{\int_0^{\pi}\sin t\cos t\mathrm{d}t}_{=0}-b\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t}_{=\frac{\pi}{2}}=0\Leftrightarrow b=2$

Calcul de la distance : Des résultats précédents, on déduit

$\inf\left\{\int_0^{\pi}(t-a\cos t-b\sin t)^2\mathrm{d}t\mid (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}=d(x,\mathrm{F})^2=\big\|x-p(x)\big\|^2=\int_0^{\pi}(t+\frac{4}{\pi}\cos t-2\sin t)^2\mathrm{d}t=\cdots=\frac{\pi^3}{3}-\frac{8}{\pi}-2\pi$