Résolution d'une EDP par changement de variables

Le tableau suivant doit vous aider à bien comprendre le fonctionnement d'un changement de variables :

Anciennes variables (x,y)	**Nouvelles variable** (u,v)
$(x,y)\in\mathscr{U}$	$(u,v)\in\mathscr{V}$
On connaît l'une des applications $[(x,y)\mapsto(u,v)=\Phi(x,y)]$ ou $[(u,v)\mapsto(x,y)=\Psi(u,v)]$ Les applications Φ et Ψ sont des bijections réciproques entre $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ mais on ne sait pas toujours bien expliciter la réciproque (et ce n'est pas un attendu du programme) *Par exemple, pour le passage en coordonnées polaires :* $(x,y)=\Psi(r,\theta)=\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)$ *mais l'expression de* $\Phi=\Psi^{-1}$ *càd exprimer r et θ à l'aide de x et y n'est pas un problème simple*	
f fonction inconnue de variables (x,y) de variables (x,y) *f peut admettre des dérivées selon x ou y* *mais pas selon u et v !*	g nouvelle fonction inconnue de variables (u,v) *g peut admettre des dérivées selon u ou v* *mais pas selon x et y !*
On a $f(x,y)=g(u,v)$ • si on connaît (x,y) en fonction de (u,v) : $g(u,v)=f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ et on peut calculer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ à l'aide de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ • si on connaît (u,v) en fonction de (x,y) : $f(x,y)=g\big(u(x,y),v(x,y)\big)$ et on peut calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$	
f vérifie une équation (E) sur $\mathscr{U}$	g vérifie une nouvelle équation (E$'$) sur $\mathscr{V}$
<u>Objectif</u> : connaissant (E) et $\mathscr{U}$, on chercher (E$'$) et $\mathscr{V}$ et on résout (E$'$) à priori plus simple si possible, on traduit les solutions g de (E$'$) en solutions f de (E) *Si on peut, il est plus pertinent de calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g car il suffit alors de substituer dans* (E) *pour trouver* (E$'$)	

• Trouver les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ en posant $\begin{cases}u=x-cy\\ v=x+cy\end{cases}$

$\begin{cases}u=x-cy\\ v=x+cy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{u+v}{2}\\ y=\dfrac{v-u}{2c}\end{cases}$ et : $(x,y)\in\mathbb{R}^2\Leftrightarrow(u,v)\in\mathbb{R}^2$

On introduit g en variable (u,v) de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ de sorte que $f(x,y)=g(x-cy,x+cy)$.

Alors : $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1\times\dfrac{\partial g}{\partial u}+1\times\dfrac{\partial g}{\partial v}$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

et : $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-c\times\dfrac{\partial g}{\partial u}+c\times\dfrac{\partial g}{\partial v}$ puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(-c)^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+(-c)\times c\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}+c\times(-c)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$

autrement dit : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ mais alors :

(E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}-\dfrac{1}{c^2}\left(c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}-2c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+c^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)=0\Leftrightarrow 4\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ (équation (E$'$))

f solution de (E) sur $\mathbb{R}^2\Leftrightarrow g$ solution de (E$'$) sur $\mathbb{R}^2\Leftrightarrow\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\varphi(v)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1

$\Leftrightarrow g(u,v)=\Phi(v)+\Psi(u)$ où $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont C^2

Ainsi : $\boxed{f\text{ solution de (E) sur }\mathbb{R}^2\Leftrightarrow f(x,y)=\Phi(x+cy)+\Psi(x-cy)\text{ où }\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ et }\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ sont }C^2}$

SUITE DE L'EXEMPLE N° 12

En utilisant le changement de variable proposé, résoudre sur l'ouvert $\mathscr{U}$ l'équation

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}=f$ où f est C^1 sur $\mathscr{U}=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en passant en coordonnées polaires

On pose $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta=\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$ ou autrement dit $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ où $(r,\theta)\in]0,+\infty[\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[=\mathscr{V}$

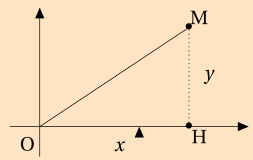
On considère alors g définit sur $\mathscr{V}$ par : $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

Si f admet des dérivées partielles premières sur $\mathscr{U}$, g admet des dérivées partielles premières sur $\mathscr{V}$ et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)=-(r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

aussi : $x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}=f\Leftrightarrow\dfrac{\partial g}{\partial\theta}=g$ Mais : $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=g\Leftrightarrow g(r,\theta)=\varphi(r)e^{\theta}$ où $\big[\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}\big]$ est de classe C^1

Le programme n'attend pas plus...car la question de l'expression de θ en fonction de x et y (relèvement de l'argument) est un problème délicat. La détermination de r ne pose en général pas de problème : $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Sur le domaine $\mathscr{U}=]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, on peut facilement obtenir θ en fonction de x et y à l'aide de considération géométrique :



Dans le triangle rectangle OMH, l'angle $\theta=(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ vérifie

$\tan\theta=\dfrac{HM}{OH}=\dfrac{y}{x}$ (Rappel : $\dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$)

En utilisant la fonction Arctan, on retourne θ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$\theta=\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$ lorsque $x>0$ et $y\in\mathbb{R}$

Ainsi, les solutions sont les fonctions $\left[(x,y)\mapsto\varphi(\sqrt{x^2+y^2})e^{\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}}\right]$ où $\big[\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}\big]$ est de classe C^1

2. (E) : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x}-4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ avec f de classe C^2 sur $\mathscr{U}=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ en posant $u=x^2-y$ et $v=x^2+y$

L'application $\begin{bmatrix}\varphi:\mathscr{U}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&(x^2-y,x^2+y)\end{bmatrix}$ est de classe C^2 sur $\mathscr{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

On cherche une équation vérifiée par g si f vérifie (E) où g est telle que : $f(x,y)=g(u,v)$ avec $(u,v)=\varphi(x,y)$ et on calcule les dérivées partielles de f à l'aide de celle de g sachant que $\forall(x,y)\in\mathscr{U}$, $f(x,y)=g(x^2-y,x^2+y)$:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\dfrac{\partial g}{\partial u}(x^2-y,x^2+y)+2x\dfrac{\partial g}{\partial v}(x^2-y,x^2+y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial g}{\partial u}(x^2-y,x^2+y)+\dfrac{\partial g}{\partial v}(x^2-y,x^2+y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2\frac{\partial g}{\partial u}(x^2-y,x^2+y)+4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x^2-y,x^2+y)+4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(x^2-y,x^2+y)$$
$$+2\frac{\partial g}{\partial v}(x^2-y,x^2+y)+4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(x^2-y,x^2+y)+4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x^2-y,x^2+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=+\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x^2-y,x^2+y)-\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(x^2-y,x^2+y)-\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(x^2-y,x^2+y)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x^2-y,x^2+y)$$

Si f est solution, f est de classe C^2 sur $\mathscr{U}$ et donc g est de classe C^2 sur $\mathscr{V}$ de sorte que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}$

Finalement, en substituant, on a :

f est solution de (E) sur $\mathscr{U}$ $\Leftrightarrow$ $\forall(x,y)\in\mathscr{U}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)-4x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$

$\Leftrightarrow$ $\forall(x,y)\in\mathscr{U}$, $\underbrace{16x^2}_{\neq 0}\dfrac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}(x^2-y,x^2+y)=0$

$\Leftrightarrow$ $\forall(u,v)\in\mathscr{V}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=0$ déjà vu en Q7 de l'exemple 11

$\Leftrightarrow$ $\exists(p,q)\in\left(C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)^2$, $\forall(u,v)\in\mathscr{V}$ $g(u,v)=p(u)+q(v)$

$\Leftrightarrow$ $\exists(p,q)\in\left(C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)^2$, $\forall(x,y)\in\mathscr{U}$, $f(x,y)=p(x^2-y)+q(x^2+y)$