EXERCICE N° 7 On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. Pour $x \in]0,1[$, justifier que $\displaystyle\frac{x^2 \ln x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\ln x) x^{2n+2}$

On reconnaît la somme d'une série géométrique de raison $q = x^2 \in]0,1[$ aussi :
$\displaystyle\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1) x^{2n}$ et, de ce fait : $\boxed{\displaystyle\frac{x^2 \ln x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\ln x) x^{2n+2}}$

2. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} \mathrm{d}x$

On pose $[f_n : x \mapsto (-\ln x) x^{2n+2}]$ telle que $\forall x \in]0,1[$, $\displaystyle\mathrm{S}(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

On veut utiliser le théorème d'intégration terme à terme :

Si $\left\{\begin{array}{l} \text{i) la fonction S est continue sur }]0,1[\\ \text{ii) toutes les fonctions } f_n \text{ sont intégrables sur }]0,1[\\ \text{iii) La série } \sum \int_{\mathrm{I}} |f_n(t)| \mathrm{d}t \text{ est convergente} \end{array}\right.$ alors S est intégrable sur $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{S}(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$

Vérification des hypothèses

Pour i) : Par les théorèmes usuels, S est continue sur $]0,1[$ vu que ln l'est sur $]0,+\infty[$ et que $x^2-1 \neq 0$ sur $]0,1[$

Pour ii) : Par les théorèmes usuels, f_n est continue et positive sur $]0,1]$ (aussi les notions de CVA et de CV se confondent) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ par croissance comparée (car $2n+2 > 0$) donc f_n est intégrable en 0 où l'intégrale est faussement généralisée

Pour iii) : Précisons $\displaystyle\mathrm{I}_n = \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \int_0^1 (-\ln x) x^{2n+2} \mathrm{d}x$

On fait une IPP avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = -\ln x \\ v'(x) = x^{2n+2} \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = -\dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \end{array}\right.$ où u et v sont C^1 sur $]0,1[$

Sous réserve que c'est possible : $\displaystyle\mathrm{I}_n = \int_0^1 (-\ln x) x^{2n+2} \mathrm{d}x = \left[(-\ln x)\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{x} \times \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right) \mathrm{d}x$

or : $\displaystyle\left[(-\ln x)\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = 0 - \frac{1}{2n+3} \times \lim_{x\to 0^+} (-\ln x) x^{2n+3} = 0$ par croissance comparée

donc l'IPP est pertinente et, puisque l'intégrale de départ est convergente, toutes les intégrales convergent.

Ainsi : $\displaystyle\mathrm{I}_n = \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{(2n+3)} \int_0^1 x^{2n+2} \mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+3)} \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+3)^2} \Leftrightarrow \mathrm{I}_n = \frac{1}{(2n+3)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n^2}$

Par critère d'équivalence, puisque $\sum \dfrac{1}{4n^2}$ (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) converge absolument,

la série $\sum \mathrm{I}_n = \sum \int_{\mathrm{I}} |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique : S est intégrable sur $]0,1[$ donc que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} \mathrm{d}x \text{ converge}}$

Calculs de la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} \mathrm{d}x$

De plus : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} \mathrm{d}x = \int_{]0,1[} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} f_n(x) \mathrm{d}x$. Or : $\displaystyle\int_{]0,1[} f_n(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 |f_n(x)| \mathrm{d}x = \frac{1}{(2n+3)^2}$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+3)^2} =_{k=n+1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ qu'on doit calculer à partir de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

On note $\mathrm{S_N}$ la somme partielle d'ordre N de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$:

$$\mathrm{S}_{2\mathrm{N}+1} = \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\mathrm{S_N} + \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \mathrm{S}_{2\mathrm{N}+1} - \frac{1}{4}\mathrm{S_N}$$

Puisque les séries $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ convergent, les sommes partielles convergent vers les sommes de ces séries :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{4\times 6} = \frac{3\pi^2}{4\times 6} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow$ $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2-1} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1}$

EXERCICE N° 8 Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

On pose, pour $x\in]0,1[$: $\displaystyle S(x)=\frac{(\ln x)^2}{1+x^2}=(\ln x)^2\times\frac{1}{1-(-x^2)}=(\ln x)^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\ln x)^2x^{2n}$

où on identifie une somme géométrique de raison $q=-x^2$ avec $|q|<1$ si $x\in]0,1[$

On introduit $\left[f_n : x\mapsto(-1)^n(\ln x)^2x^{2n}\right]$ de sorte que $\displaystyle\forall x\in]0,1[,\ S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$

et on envisage d'utiliser le théorème d'intégration terme à terme :

Si $\begin{cases}\text{i) la fonction S est continue sur }]0,1[\\ \text{ii) toutes les fonctions } f_n \text{ sont intégrables sur }]0,1[\\ \text{iii) La série } \sum\int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t \text{ est convergente}\end{cases}$ alors S est intégrable sur $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$

Vérification des hypothèses

Pour i) : Par les théorèmes usuels, S est continue sur $]0,1[$ vu que ln l'est sur $]0,+\infty[$ et que $x^2+1\neq 0$ sur $]0,1[$

Pour ii) : Par les théorèmes usuels, f_n est continue sur $]0,1]$ et : $|f_n(x)|=(\ln x)^2x^{2n}$

- si $n>0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f_n(x)=0$ par croissance comparée (car $2n>0$) donc f_n est intégrable en 0 (intégrale faussement généralisée)

- si $n=0$, $\displaystyle f_0(x)=(\ln x)^2=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ vu que $\sqrt{x}\times(\ln x)^2\xrightarrow[x\to 0]{}0$ par croissance comparée. Or, $\left[x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}\right]=\left[x\mapsto\frac{1}{x^{\frac12}}\right]$ est une fonction de Riemann intégrable en 0 car $\alpha=\frac12<1$ et donc on obtient l'intégrabilité de f_0 sur $]0,1]$ par la règle du o.

Pour iii) : Calculons $\displaystyle I_n=\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1(\ln x)^2x^{2n}\mathrm{d}x$

On réalise une première IPP avec $\begin{cases}u(x)=(\ln x)^2\\ v'(x)=x^{2n}\end{cases}$ soit $\begin{cases}u'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}\\ v(x)=\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{cases}$ où u et v sont C^1 sur $]0,1[$

Sous réserve que c'est possible : $\displaystyle I_n=\int_0^1(\ln x)^2x^{2n}\mathrm{d}x=\left[(\ln x)^2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{2(\ln x)}{x}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\mathrm{d}x$

or : $\displaystyle\left[(\ln x)^2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1=0-\frac{1}{2n+1}\times\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2x^{2n+1}=0$ par croissance comparée vu que $2n+1>0$

Aussi, l'IPP est pertinente et puisqu'on sait que I_n converge (à cause de ii) toutes les intégrales convergent et :

$\displaystyle I_n=0-\frac{2}{(2n+1)}\int_0^1(\ln x)x^{2n}\mathrm{d}x$ et on fait une 2nd IPP avec $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=x^{2n}\end{cases}$ soit $\begin{cases}u'(x)=\dfrac{1}{x}\\ v(x)=\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{cases}$ où u et v sont C^1 sur $]0,1[$

Sous réserve que c'est possible : $\displaystyle\int_0^1(\ln x)x^{2n}\mathrm{d}x=\left[(\ln x)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1-\int_0^1\left(\frac{1}{x}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\mathrm{d}x$

or : $\displaystyle\left[(\ln x)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1=0-\frac{1}{2n+1}\times\lim_{x\to 0^+}(\ln x)x^{2n+1}=0$ par croissance comparée vu que $2n+1>0$

L'IPP est pertinente et puisque l'intégrale de départ converge (en conséquence de la première IPP),toutes les intégrales convergent et :

$\displaystyle I_n=-\frac{2}{(2n+1)}\left(0-\int_0^1\frac{x^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}x\right)=\frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^1x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{2}{(2n+1)^2}\left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\right]_0^1=\frac{2}{(2n+1)^3}$ car $2n+1>0$

Finalement : $\displaystyle I_n=\frac{2}{(2n+1)^3}\sim_{+\infty}\frac{1}{8n^3}$ or $\sum\frac{1}{8n^3}$ converge absolument (Riemann avec $\alpha=3>1$) donc, par critère d'équivalence, la série $\displaystyle\sum I_n=\sum\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x$ converge.

Fin de l'argument

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique S est intégrable sur $]0,1[$ ce qui assure l'existence de l'intégrale dans l'énoncé et on a aussi :

$$\int_0^1\frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1f_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n\times(\ln x)x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n(\ln x)^2x^{2n}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nI_n$$

d'où avec les calculs précédents : $\displaystyle\int_0^1\frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\times\frac{2}{(2n+1)^3}=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$