PT : Correction du TD n° 3 sur le chapitre VI

EXEMPLE 6 On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$ et $B_1=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

Les matrices A et B sont-elles semblables ? Les matrices A et B_1 sont-elles semblables ?

• $\chi_A(x)=x^2-\operatorname{tr}(A)x+\det(A)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ et $\chi_B(x)=x^2-\operatorname{tr}(B)x+\det(B)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$\chi_A=\chi_B$ est un polynôme scindé à racines simples donc les matrices A et B sont diagonalisables autrement dit :

$$\exists P\in GL_2(\mathbb{R}),\ P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=D \quad\text{et}\quad \exists Q\in GL_2(\mathbb{R}),\ Q^{-1}BQ=D$$

Mais alors : $P^{-1}AP=Q^{-1}BQ\Rightarrow QP^{-1}APQ^{-1}=B\Rightarrow R^{-1}AR=B$ où $R=PQ^{-1}$ soit $\boxed{\text{A et B sont semblables}}$

puisque $R^{-1}=(PQ^{-1})^{-1}=(Q^{-1})^{-1}P^{-1}=QP^{-1}$ Rappels : $(MN)^{-1}=N^{-1}M^{-1}$

• $\chi_{A_1}(x)=x^2-\operatorname{tr}(A_1)x+\det(A_1)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ et $\chi_{B_1}(x)=x^2-\operatorname{tr}(B_1)x+\det(B_1)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

$\chi_A=\chi_B$ est un polynôme scindé donc les matrices A_1 et B_1 sont trigonalisables

$$\exists P_1\in GL_2(\mathbb{R}),\ P_1^{-1}A_1P_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=T \quad\text{et}\quad \exists Q_1\in GL_2(\mathbb{R}),\ Q_1^{-1}B_1Q_1=T$$

Mais : $P_1^{-1}A_1P_1=Q_1^{-1}B_1Q_1\Rightarrow Q_1P_1^{-1}A_1P_1Q_1^{-1}=B_1\Rightarrow R_1^{-1}A_1R_1=B_1$ où $R_1=P_1Q_1^{-1}$ soit $\boxed{A_1 \text{ et } B_1 \text{ sont semblables}}$

puisque $R_1^{-1}=(P_1Q_1^{-1})^{-1}=(Q_1^{-1})^{-1}P_1^{-1}=Q_1P_1^{-1}$

Dans le cas où elles sont semblables, donner la relation de similitude.

Il s'agit donc de déterminer explicitement $R=PQ^{-1}$ et $R_1=P_1Q_1^{-1}$ soit d'obtenir les matrices P, Q, P_1 et Q_1 en réalisant la réduction des matrices A, B, A_1 et B_1

Déterminons la matrice $R=PQ^{-1}$:

• Pour A : $\boxed{\text{A est diagonalisable}}$ et les sev propres sont de dimension 1 (puisque les valeurs propres sont simples). Il suffit de trouver un vecteur dans ses sev pour en obtenir une base.

$E_1(A)=\operatorname{Ker}(A-I_2)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}=\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ où $\underline{\varepsilon_1=(0,1)}$ car $(A-I_2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad b=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est une base

$E_2(A)=\operatorname{Ker}(A-2I_2)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}=\operatorname{Vect}(\varepsilon_2)$ où $\underline{\varepsilon_2=(1,-1)}$ car $(A-2I_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ de diagonalisation de A.

$\boxed{\text{La réduite est } D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \text{ associée à la matrice de passage } P=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix} \text{ telle que } P^{-1}AP=D}$

• Pour B : $\boxed{\text{B est diagonalisable}}$ car χ_B est scindé à racines simples. Les sev propres sont de dimension 1 et il suffit de trouver un vecteur dans ses sev pour en obtenir une base.

$E_1(B)=\operatorname{Ker}(B-I_2)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\operatorname{Vect}(u_1)$ où $\underline{\varepsilon_2=(1,-1)}$ car $(B-I_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad b'=(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$ est une base

$E_2(B)=\operatorname{Ker}(B-2I_2)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}=\operatorname{Vect}(u_2)$ où $\underline{\varepsilon_1=(0,1)}$ car $(B-2I_2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\quad$ de diagonalisation de B.

$\boxed{\text{La réduite est } D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \text{ associée à la matrice de passage } Q=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} \text{ telle que } Q^{-1}BQ=D}$

• On peut alors calculer : $R=PQ^{-1}$ en commençant par calculer $Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ puis $R=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ (à faire)

Déterminons la matrice $R_1=P_1Q_1^{-1}$:

• Pour A_1 :

$E_1(A_1)=\operatorname{Ker}(A_1-I_2)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ alors $\operatorname{rg}(A_1-I_1)=1\Rightarrow \dim E_1(A_1)=2-1=1$ par le théorème du rang

$\dim E_1(A_1)\neq m(1)$ donc $\boxed{\text{la matrice } A_1 \text{ n'est pas diagonalisable mais trigonalisable}}$ en une matrice $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

De plus, on remarque que $\varepsilon_1=(1,-1)\in E_1(A_1)$ or $\dim E_1(A_1)=1$ donc $E_1(A_1)=\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$.

Si A_1 représente $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dans la base canonique b_{can} alors T représente f dans une base de trigonalisation $b_1=(u,v)$:

$T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\operatorname{Mat}_{b_1}(f)=\operatorname{Mat}_{(u,v)}\big(f(u),f(v)\big)\Leftrightarrow\begin{cases}f(u)=u\\f(v)=u+v\end{cases}$

$f(u)=u\Leftrightarrow u\in E_1(A_1)$ donc $u=(\alpha,-\alpha)$ où $\alpha\neq0$ et $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec :

$f(v)=u+v\Leftrightarrow BA_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=\alpha+x\\-x=-\alpha+y\end{cases}\Leftrightarrow x+y=\alpha$ et $\det_{b_{can}}(u,v)=\begin{vmatrix}\alpha&x\\-\alpha&\alpha-x\end{vmatrix}=\alpha(\alpha-x)+\alpha x=\alpha^2\neq0$

$\boxed{\text{la réduite est } T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \text{ associée à une matrice de passage } P_1=\begin{pmatrix}\alpha&x\\-\alpha&\alpha-x\end{pmatrix} \text{ où } \alpha\neq0 \text{ et } x\in\mathbb{R} \text{ avec } P_1^{-1}A_1P_1=T}$

• Pour B_1 :

$E_1(B_1)=\operatorname{Ker}(B_1-I_2)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$ alors $\operatorname{rg}(B_1-I_1)=1\Rightarrow \dim E_1(B_1)=2-1=1$ par le théorème du rang

$\dim E_1(B_1)\neq m(1)$ donc $\boxed{\text{la matrice } B_1 \text{ n'est pas diagonalisable mais trigonalisable}}$ en une matrice $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

De plus, on remarque que $\varepsilon_1=(0,1)\in E_1(B_1)$ or $\dim E_1(B_1)=1$ donc $E_1(B_1)=\operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$.

Si B_1 représente $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dans la base canonique b_{can} alors T représente f dans une base de trigonalisation $b_1=(u,v)$: $T=\operatorname{Mat}_{b_1}(f)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\operatorname{Mat}_{(u,v)}\big(f(u),f(v)\big)\Leftrightarrow\begin{cases}f(u)=u\\f(v)=u+v\end{cases}$

$f(u)=u\Leftrightarrow u\in E_1(B_1)$ donc $u=(0,\alpha)$ où $\alpha\neq0$ et $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec :

$f(v)=u+v\Leftrightarrow B_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0+x\\-x+y=\alpha+y\end{cases}\Leftrightarrow x=-\alpha$ et $\det_{b_{can}}(u,v)=\begin{vmatrix}0&-\alpha\\\alpha&y\end{vmatrix}=\alpha^2\neq0$

$\boxed{\text{la réduite est } T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \text{ associée à une matrice de passage } Q_1=\begin{pmatrix}0&-\alpha\\\alpha&y\end{pmatrix} \text{ où } \alpha\neq0 \text{ et } y\in\mathbb{R} \text{ avec } Q_1^{-1}B_1Q_1=T}$

• Pour déterminer R_1, on choisit des matrices P_1 et Q_1 simples :

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\ (\text{avec } \alpha=1,\ x=0) \quad\text{et}\quad Q_1=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\ (\text{avec } \alpha=1,\ y=0)$$

On calcule alors $Q_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ puis $R_1=P_1Q_1^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$

LEROY - PT Paul Constans