Correction du TD n° 3 sur le chapitre V : Compléments sur les équations différentielles

EXERCICE N° 5 On considère l'équation différentielle (E) : $t^2y''+ty'-9y=5t^2-9$

1. Chercher les solutions homogènes polynômiales de (E) sur $\mathbb{R}$

On cherche une solution polynômiale homogène $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant: $X^2P''+XP'-9P=0$
L'ensemble de ces solutions est un sev de $\mathbb{R}[X]$ qui contient $P=0$ (solution triviale).
Si $P\neq 0$ alors $P=aX^n+R$ de degré $n\in\mathbb{N}$, de coefficient dominant $a\neq 0$, avec $\deg R<n$.

$$X^2(n(n-1)aX^{n-2}+R'')+X(naX^{n-1}+R')-9(aX^n+R)=\underbrace{\left(n(n-1)+n-9\right)}_{=n^2-9}aX^n+\underbrace{\left(X^{n-2}R''+XR'-9R\right)}_{\text{de degré }\leqslant\max(2+\deg R-2,1+\deg R-1,\deg R)<n}$$

P sera solution homogène de (E) lorsque $n^2-9=0\Leftrightarrow n=3$ (car $a\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}$)
On cherche alors $P=aX^3+bX^2+cX+d$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ vérifiant:

$$X^2P''+XP'-9P=0\Leftrightarrow X^2(6aX+2b)+X(3aX^2+2bX+c)-9(aX^3+bX^2+cX+d)=0\Leftrightarrow\begin{cases}6a+3a-9a=0\\2b+2b-9b=0\\c-9c=0\\-9d=0\end{cases}$$

On trouve: $\begin{cases}b=c=d=0\\a\in\mathbb{R}\end{cases}$. $\boxed{\text{L'ensemble des solutions polynômiales homogène de (E) sur }\mathbb{R}\text{ est }\mathrm{Vect}\left([x\mapsto x^3]\right)}$

2. Chercher une solution particulière polynômiale de (E) sur $\mathbb{R}$

On choisit de rechercher une solution analogue au second membre. Vu l'étude sur le degré mené dans la question précédente, on constate que si $\deg P=n\neq 3$ alors $\deg(X^2P''+XP'-P)=n$ donc, pour obtenir l'égalité de (E), il faut utiliser cette fois un polynôme de degré 2 sous la forme $P=bX^2+cX+d$ avec $(b,c,d)\in\mathbb{R}^4$

$$X^2P''+XP'-9P=5X^2-9\Leftrightarrow X^2(2b)+X(2bX+c)-9(bX^2+cX+d)=5X^2-9\Leftrightarrow\begin{cases}2b+2b-9b=5\\c-9c=0\\-9d=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\c=0\\d=1\end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{[y_p:x\mapsto 1-x^2]\text{ est une solution particulière polynômiale de (E) sur }\mathbb{R}}$

3. Résoudre (E) sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}^*$.

• (E) est une EDL_2 non homogène résolue en y'' sur I car $t^2\neq 0$ aussi la théorie s'applique et l'ensemble des solutions est $\mathscr{S}_I=y_p+\mathrm{Vect}(h_1,h_2)$ où $\begin{cases}y_p\text{ est une solution particulière de (E) sur I}\\h_1\text{ et }h_2\text{ sont des solutions homogènes non colinéaires}\end{cases}$

• la question 2) donne une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur I aussi $y_p=[t\mapsto 1-t^2]$ convient.

• la question 1) donne une solution homogène $[h_1:t\mapsto t^3]$ sur $\mathbb{R}$ (donc aussi sur I) qui ne s'annule pas sur I donc on peut chercher une autre solution homogène par la méthode de Lagrange.
Abaissement de l'ordre: on cherche la solution sous la forme $h(t)=z(t)h_1(t)$
avec z est 2 fois dérivable sur I et $h_1(t)=t^3$ soit $h_1'(t)=3t^2$

$$t^2h''+th'-9y=0\Leftrightarrow t^2(z''h_1+2z'h_1'+zh_1'')+t(z'h_1+zh_1')-9zy_1=0\Leftrightarrow\underbrace{(t^2h_1''+th_1'-9h_1)}_{=0}z+t^5z''+(6t^4+t^4)z'=0$$

Ainsi, $Y=z'$ est solution sur I de l'équation: $t^5Y'+7t^4Y=0\Leftrightarrow Y'+\frac{7}{t}Y=0$

On résout l'équation du premier ordre: L'ensemble des solutions est Vect(H) où: $H(t)=e^{-7\ln|t|}=\frac{1}{t^7}$
(Quitte à faire porter le signe sur la constante puisque $|t|$ garde un signe constant sur I)

On résout l'équation du second ordre: Sur I,
$h=z\times h_1$ solution homogène de (E)

$\Leftrightarrow z'$ solution de $Y'+\frac{7}{t}Y=0\Leftrightarrow\exists K\in\mathbb{R},\forall t\in I,\ z'(t)=\frac{K}{t^7}=Kt^{-7}$

$\Leftrightarrow\exists(K,C)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in I,\ z(t)=K\frac{t^{-6}}{-6}+C=\frac{\lambda}{t^6}+C$ où $(\lambda,C)\in\mathbb{R}^2$ avec $\lambda=-\frac{K}{6}$

$\Leftrightarrow\exists(\lambda,C)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in I,\ h(t)=\frac{\lambda}{t^3}+Ct^3$ vu que $h_1(t)=t^3$

$\Leftrightarrow h\in\mathrm{Vect}(h_1,h_2)$ où $\begin{cases}h_1(t)=t^3\\h_2(t)=\frac{1}{t^3}\end{cases}$

h_2 est bien une autre solution homogène qui n'est pas colinéaire à h_1 où $h_1(t)=t^3$ (à cause des limites en 0).

• Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions sur I de (E) est }\mathscr{S}_I=\left\{\left[t\mapsto 1-t^2+\frac{\lambda}{t^3}+\mu t^3\right]\mid(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}}$

4. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit d'étudier le recollement en 0.

y est une solution sur $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}1)\ y\text{ est solution sur }]-\infty,0[\ :\ \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall t<0,\ y(t)=1-t^2+\alpha t^3+\frac{\beta}{t^3}\\2)\ y\text{ est solution sur }]0,+\infty[\ :\ \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall t>0,\ y(t)=1-t^2+\lambda t^3+\frac{\mu}{t^3}\\3)\ y\text{ est deux fois dérivable en 0 avec }-9y(0)=-9\Leftrightarrow y(0)=1\end{cases}$

• Si $\beta\neq 0$ ou $\mu\neq 0$ alors l'une des limites $\lim\limits_{t\to 0^\pm}y(t)=\pm\infty$ et il n'y a pas continuité donc: $\beta=\mu=0$

• On a alors: $y(t)=1+o(t)$ en 0^- et en 0^+ sans condition sur α et β donc y est dérivable en 0 puisqu'elle y admet un DL_1 et: $y(0)=1,\ y'(0)=0$

• De plus: $y'(t)=\begin{cases}-2t+3\alpha t^2\text{ si }t<0\\-2t+3\beta t^2\text{ si }t>0\end{cases}$ donc $y'(t)=-2t+o(t)$ en 0^- et en 0^+ sans condition sur α et β
donc y' est dérivable en 0 avec $y''(0)=(y')'(0)=-2$

En définitive, $\boxed{\text{les solutions de (E) sur }\mathbb{R}\text{ ont pour expression }\quad y(t)=\begin{cases}1-t^2+\alpha t^3\text{ si }t<0\\1\text{ si }t=0\\1-t^2+\lambda t^3\text{ si }t>0\end{cases}}$

$\boxed{\text{EXERCICE N}^{\text{o}}\ 6}$ Résoudre l'équation (E) : $(1+x^2)^2y''+2(x-1)(1+x^2)y'+y=0$ en posant $t=\operatorname{Arctan} x$

(E) est une EDL2 résolue sur $\mathbb{R}$ (car $(1+x^2)^2\neq 0$) homogène donc on sait que l'ensemble des solutions est de la forme $\operatorname{Vect}(h_1,h_2)$ où h_1 et h_2 sont non colinéaires.
Arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[=\mathrm{I}$ et sa réciproque est $\tan_{/\mathrm{I}}$ (restriction de tangente à l'intervalle I)
On pose $z(t)=y(\tan t)\Leftrightarrow y(x)=z(\operatorname{Arctan} x)$ et, par composition :

$$y \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow z \text{ est deux fois dérivable sur I}$$

Méthode n° 1

$\forall x\in\mathbb{R},\quad y'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\times z'(\operatorname{Arctan} x)\quad$ et $\quad y''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}z'(\operatorname{Arctan} x)+\dfrac{1}{(1+x^2)^2}z''(\operatorname{Arctan} x)$

$\forall x\in\mathbb{R},(1+x^2)^2y''(x)+2(x-1)(1+x^2)y'(x)+y(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ z''(\operatorname{Arctan} x)-2xz'(\operatorname{Arctan} x)+2(x-1)z'(\operatorname{Arctan} x)+z(\operatorname{Arctan} x)=0$

$\Leftrightarrow \forall t\in\mathrm{I},\ z''(t)-2z'(t)+z(t)=0$ (Equation caractéristique : $r^2-2r+1=0\Leftrightarrow(r-1)^2=0$)

$\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in\mathrm{I},z(t)=(at+b)e^t\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=(a\operatorname{Arctan} x+b)e^{\operatorname{Arctan} x}$

Méthode n° 2

$\forall t\in\mathrm{I},\quad z(t)=y(\tan t)\quad z'(t)=(1+\tan^2 t)y'(\tan t)\quad z''(t)=2\tan t(1+\tan^2 t)y'(\tan t)+(1+\tan^2 t)^2y''(\tan t)$

$\forall x\in\mathbb{R},(1+x^2)^2y''(x)+2(x-1)(1+x^2)y'(x)+y(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall t\in\mathrm{I},\ (1+\tan^2 t)^2y''(\tan t)+2(\tan t-1)(1+\tan^2 t)y'(\tan t)+y(\tan t)=0$

$\Leftrightarrow \forall t\in\mathrm{I},\ \underbrace{(1+\tan^2 t)^2y''(\tan t)+2\tan t(1+\tan^2 t)y'(\tan t)}_{=z''(t)}-\underbrace{(1+\tan^2 t)y'(\tan t)}_{=z'(t)}+\underbrace{y(\tan t)}_{=z(t)}=0$

$\Leftrightarrow \forall t\in\mathrm{I},\ z''(t)-z'(t)+z(t)=0$ (Equation caractéristique : $r^2-2r+1=0\Leftrightarrow(r-1)^2=0$)

$\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in\mathrm{I},z(t)=(at+b)e^t\Leftrightarrow\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=(a\operatorname{Arctan} x+b)e^{\operatorname{Arctan} x}$

$\boxed{\text{En définitive : } \mathscr{S}=\operatorname{Vect}(h_1,h_2) \text{ où } \left[h_1:x\mapsto(\operatorname{Arctan} x)e^{\operatorname{Arctan} x}\right] \text{ et } \left[h_2:x\mapsto e^{\operatorname{Arctan} x}\right]}$

Il est important de comprendre qu'un changement de variables est une liaison entre « deux mondes ». Le changement de variable est relié à une bijection : ici la fonction Arctan qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{I}=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

Monde la variable x		Monde la variable t
$x\in\mathbb{R}$	$\xrightarrow{t=\operatorname{Arctan} x}$ $\xleftarrow{x=\tan t}$	$t\in\mathrm{I}=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
fonction inconnue y	$\xleftarrow{y(x)=z(\operatorname{Arctan} x)}$ $\xrightarrow{z(t)=y(\tan t)}$	fonction inconnue z
vérifiant l'équation (E)		vérifiant l'équation $(\tilde{\mathrm{E}})$