

Dans $M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, on considère l'ensemble E des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $M - M^T = \text{tr}(M)I_n$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$

Par définition : $E \subset M_n(\mathbb{R})$

$E \neq \emptyset$ car la matrice nulle $O_{nn} \in E$ puisque $O_{nn} - O_{nn}^T = O_{nn} - O_{nn} = O_{nn}$ et $\text{tr}(O_{nn})I_n = 0 \times I_n = O_{nn}$

Prouvons que E est stable par combinaison linéaire : $\forall (M, N) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, vérifions que $\alpha M + N \in E$

$(\alpha M + N) - (\alpha M + N)^T = (\alpha M + N) - (\alpha M^T + N^T)$ car la transposition est linéaire mais alors :

$(\alpha M + N) - (\alpha M + N)^T = \alpha(M - M^T) + (N - N^T) = \alpha \text{tr}(M)I_n + \text{tr}(N)I_n$ puisque M et N sont dans E

Mais, puisque la trace est linéaire :

$(\alpha M + N) - (\alpha M + N)^T = \alpha \text{tr}(M)I_n + \text{tr}(N)I_n = (\alpha \text{tr}(M) + \text{tr}(N))I_n = \text{tr}(\alpha M + N)I_n$ et donc $\alpha M + N \in E$

2. Si $M \in E$, déterminer $\text{tr}(M)$. En déduire que, si $M \in E$, alors M est une matrice symétrique réelle.

Si $M \in E$ alors : $M - M^T = \text{tr}(M)I_n$ alors, en prenant la trace dans cette égalité, on a :

$$\text{tr}(M) - \text{tr}(M^T) = \text{tr}(M)\text{tr}(I_n) \Leftrightarrow \text{tr}(M) - \text{tr}(M) = \text{tr}(M) \times n \Leftrightarrow 0 = \text{tr}(M) \times n$$

Puisque $n \neq 0$, on a nécessairement $\text{tr}(M) = 0$ et alors : $M - M^T = 0 \times I_n = 0 \Rightarrow M = M^T$ ie M est symétrique réelle.

3. Est-ce que toutes les matrices symétriques réelles sont dans E ? Démontrer que : $E = S_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{tr})$ où $S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles.

Non, toutes les matrices symétriques réelles ne sont pas dans E : la matrice I_n est symétrique réelle mais elle n'est pas dans E car $I_n - I_n^T = I_n - I_n = O_{nn}$ alors que $\text{tr}(I_n)I_n = nI_n \neq O_{nn}$

On a déjà vu que : si $M \in E$ alors $M \in S_n(\mathbb{R})$ et que $\text{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow M \in \text{Ker}(\text{tr})$ de sorte que $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{tr})$

On en déduit que : $E \subset S_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{tr})$

Réciproquement : si $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{tr})$ alors $M - M^T = 0$ (car M est symétrique) et $\text{tr}(M) = 0$ donc l'égalité $M - M^T = \text{tr}(M)I_n$ est vérifiée et on a bien $M \in E$. On a donc aussi : $S_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{tr}) \subset E$

Par double inclusion, on conclut que : $E = S_n(\mathbb{R}) \cap \text{Ker}(\text{tr})$

4. On appelle E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.

On rappelle que $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Donner (sans démonstration) une base de $S_n(\mathbb{R})$ exprimée à l'aide des matrices $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ainsi que $\dim S_n(\mathbb{R})$

Pour obtenir une matrice symétrique, il faut définir les coefficients de la diagonales et le coefficient (i, j) au dessus de la diagonale (càd $j > i$) est le même que le coefficient (j, i) en dessous de la diagonale.

Par exemple pour $S_3(\mathbb{R})$:

$$M \in S_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^5, M = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & d & c \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{22} + cE_{33} + d(E_{12} + E_{21}) + e(E_{21} + E_{12}) + f(E_{13} + E_{31})$$

Une base de $S_n(\mathbb{R})$ est donc $((E_{11}, \dots, E_{nn}) \cup (E_{ij} + E_{ji})_{1 < i < j \leq n})$ et on a : $\dim S_n(\mathbb{R}) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Pour avoir tous les coefficients d'une matrice symétrique, on doit connaître 1 coefficient sur la dernière ligne, 2 sur l'avant-dernière, ..., n coefficients sur la première ligne

5. Justifier que E est un hyperplan de $S_n(\mathbb{R})$ et, en déduire, $\dim E$.

Dans $S_n(\mathbb{R})$, notons $(m_{11}, m_{22}, \dots, m_{nn}) \cup (m_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$ les coordonnées de M dans la base précédente.

$$M \in E \Leftrightarrow m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn} = 0 \Leftrightarrow 1 \times m_{11} + 1 \times m_{22} + \dots + 1 \times m_{nn} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 0 \times m_{ij} = 0$$

aussi E est caractérisée par une équation linéaire non triviale dans la base de $S_n(\mathbb{R})$ donc E est un hyperplan de $S_n(\mathbb{R})$ et :

$$\dim E = \dim S_n(\mathbb{R}) - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$