

PT : TD n° 2 sur le chapitre II : La notion d'hyperplan

1. Dans cette question, on travaille dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  c'ad  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$

Pour un polynôme P de  $\mathbb{R}_3[X]$ , on note  $(a, b, c, d)$  ses coordonnées dans  $\mathcal{B}$  autrement dit  $P = a + bX + cX^2 + dX^3$

a. On considère le sev H de  $\mathbb{R}_3[X]$  donné par l'équation  $a + 2b + 3c + 4d = 0$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

i. Donner un vecteur non nul de H.  $\boxed{3 - 2X - X^2 + X^3 \in H}$  où  $(a, b, c, d) = (3, -2, -1, 1)$  avec  $3 + 2(-2) + (-1) + 4(1) = 0$

ii. Sans aucun calcul, donner la dimension de H.

H est décrit par une équation linéaire dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  de coefficients  $(1, 2, 3, 4) \neq (0, 0, 0, 0)$  donc c'est un hyperplan. On sait donc que :  $\dim H = \dim \mathbb{R}_3[X] - 1 = 4 - 1 \Leftrightarrow \boxed{\dim H = 3}$

iii. Expliciter une base de H

Il suffit de choisir 3 vecteurs de H linéairement indépendants. On peut les choisir échelonné en degré pour assurer l'indépendance linéaire. Par exemple :  $2 - X, 13 - X^2$  et  $4 - X^3$  sont tous dans H et  $(2 - X, 3 - X^2, 4 - X^3)$  est libre car échelonné en degré donc  $\boxed{(2 - X, 3 - X^2, 4 - X^3)}$  est une base de H

b. i. Les sous-espaces suivant sont-ils des hyperplans de  $\mathbb{R}_3[X]$ ?

- $F_1 = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  où  $P_1 = 1 + X + X^2 + X^3, P_2 = X + X^2$  et  $P_3 = X^3 + 1$ .

On remarque que  $:P_2 + P_3 = P_1$  donc  $F_1 = \text{Vect}(P_2, P_3)$  et  $P_2$  et  $P_3$  sont non colinéaires (à cause des degrés) aussi  $(P_2, P_3)$  est une base de  $F_1$  donc  $\dim F_1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}_3[X] - 1$  aussi  $\boxed{F_1}$  n'est pas un hyperplan de  $\mathbb{R}_3[X]$

- $F_2 = \text{Vect}(Q_1, Q_2, Q_3)$  où polynômes  $Q_1 = 1 + X^2, Q_2 = X - 1$  et  $Q_3 = 1 + X + X^2 + X^3$

$(Q_2, Q_1, Q_3)$  est une famille de polynômes échelonnés en degré donc elle est libre et c'est une base de  $F_2$  donc  $\dim F_2 = 3 = \dim \mathbb{R}_3[X] - 1$  et  $\boxed{F_2}$  est bien un hyperplan.

ii. Pour le sev précédent qui est un hyperplan, donner son équation dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

$$P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in F_2 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, P = \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha - \beta + \gamma \\ b = \beta + \gamma \\ c = \alpha + \gamma \\ d = \gamma \end{cases} \begin{cases} a = (c - d) - (b - d) + d \\ \beta = b - d \\ \alpha = c - d \\ \gamma = d \end{cases} \begin{matrix} \text{a une solution} \\ \text{a une solution} \end{matrix}$$

Pour avoir une solution, l'équation de compatibilité de la ligne 1 du système doit être satisfaite donc

$$\boxed{F_2 \text{ est le sev d'équation } a + b - c - d = 0}$$

OU BIEN

$$P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in F_2 \Leftrightarrow \text{la famille } (Q_1, Q_2, Q_3, P) \text{ est liée} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(Q_1, Q_2, Q_3, P) = 0$$

$$\det_{\mathcal{B}}(Q_1, Q_2, Q_3, P) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & d \end{vmatrix} = +1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & c-a-b \\ 0 & 1 & d \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ l_3 - l_2 - l_1 \end{matrix}$$

$$\text{Alors : } P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in F_2 \Leftrightarrow +1 \times (-1 \times d - 1 \times (c - a - b)) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a + b - c - d = 0}$$

en dév selon  $C_1$

2. Dans cette question, on travaille dans  $M_2(\mathbb{R})$ .

- $E_1$  est le noyau de l'application linéaire  $f$  telle que :  $\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), f(M) = a + b + c + d$ .

- $E_2$  est le sev de  $M_2(\mathbb{R})$  engendré par  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donner un vecteur non nul de  $E_1$ . Prouver que  $E_1$  et  $E_2$  sont des hyperplans de  $M_2(\mathbb{R})$ .

Donner une équation de chacun de ces hyperplans dans la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$ .

$$\text{Pour } E_1 : E_1 = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = 0 \right\} \text{ aussi } \boxed{M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in E_1} \text{ car } f(M_1) = 1 - 1 = 0.$$

$f \in \mathcal{L}'(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$  est une forme linéaire et  $f$  n'est pas nulle OU BIEN  $\text{rg}(f) = 1$  ( $\dim f \subset \mathbb{R}$  et  $\dim \text{Im } f = 1$  car  $\leq 1$  à cause de l'inclusion et  $\geq 1$  car  $f$  non nulle). Par le théorème du rang :  $\dim E_1 = \dim \text{Ker } f = \dim M_2(\mathbb{R}) - \text{rg } f = \dim M_2(\mathbb{R}) - 1$  de sorte que  $\boxed{E_1}$  est un hyperplan de  $M_2(\mathbb{R})$

Enfin, les coordonnées dans la base canonique de  $M_2(\mathbb{R})$  sont  $(a, b, c, d)$  pour  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et on a :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0 \text{ donc } \boxed{a + b + c + d = 0 \text{ est une équation de l'hyperplan } E_1}$$

Pour  $E_2$  : On vérifie trivialement que la famille  $(A, B, C)$  est libre donc c'est une base de  $E_2$  aussi  $\dim E_2 = 3 = \dim M_2(\mathbb{R}) - 1$  et  $\boxed{E_2}$  est un hyperplan de  $M_2(\mathbb{R})$ .

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, M = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha + \gamma \\ c = \alpha + \beta \\ d = (c + d - a) + (b + d - a) \end{cases} \begin{matrix} \text{a une solution} \\ \text{a une solution} \\ \text{a une solution} \\ \text{a une solution} \end{matrix} \Leftrightarrow \boxed{2a = b + c + d} \text{ (équation de compatibilité)}$$

OU BIEN

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2 = \text{Vect}(A, B, C) \Leftrightarrow \text{la famille } (A, B, C, M) \text{ est liée} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}} (A, B, C, M) = 0$$

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}} (A, B, C, M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & b-a \\ 0 & -1 & c-a \\ 1 & 1 & d \end{vmatrix} \begin{matrix} l_3 - l_2 - l_1 \\ l_3 - l_2 - l_1 \\ l_3 - l_2 - l_1 \end{matrix} \begin{matrix} \text{en dév selon } C_1 \text{ puis :} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}} (A, B, C, M) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & b-a+d \\ 0 & -1 & c-a \\ 1 & 1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b-a+d \\ 0 & -1 & c-a \\ 1 & 1 & d \end{vmatrix} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & b-a+d \\ -1 & c-a \end{vmatrix} = (c-a) - (-1) \times (b-a+d)$$

$$\text{Ainsi : } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow -2a + b + c + d = 0$$