1. Dans cette question, on travaille dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ càd $\mathscr{B} = \boxed{(1, X, X^2, X^3)}$

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$, on note (a, b, c, d) ses coordonnées dans $\mathscr{B}$ autrement dit $P = \boxed{a + bX + cX^2 + dX^3}$

a. On considère le sev H de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par l'équation $a + b + c + d = 0$ dans la base $\mathscr{B}$.

i. Donner un vecteur non nul de H. Par exemple : $\boxed{1 - X + X^2 - X^3 \in H}$ avec $1 - 1 + 1 - 1 = 0$

ii. Sans aucun calcul, donner la dimension de H.

H est décrit par une équation linéaire $1 \times a + 1 \times b + 1 \times c + 1 \times d = 0$ non triviale dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ donc c'est un hyperplan. On sait donc que : $\dim H = \dim \mathbb{R}_3[X] - 1 = 4 - 1 \Leftrightarrow \boxed{\dim H = 3}$

iii. Expliciter une base de H

Il suffit de choisir 3 vecteurs de H linéairement indépendants. On peut les choisir échelonné en degré pour assurer l'indépendance linéaire. Par exemple : $1 - X$, $1 - X^2$ et $1 - X^3$ sont tous dans H car $1 - 1 = 0$ de sorte que la famille $\mathscr{F} = (1 - X, 1 - X^2, 1 - X^3)$ de H est libre car constituée de polynômes non nuls échelonnés en degré avec $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 3 = \dim H$ donc $\boxed{(1 - X, 1 - X^2, 1 - X^3) \text{ est une base de H}}$

b. i. Les sous-espaces suivant sont-ils des hyperplans de $\mathbb{R}_3[X]$?

- $F_1 = \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ où $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = X + X^2 + X^3$ et $P_3 = X^3 - 1$.

  On remarque que :$P_3 = P_2 - P_1$ donc $F_1 = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ et P_1 et P_2 sont non colinéaires aussi (P_1, P_2) est une base de F_1 donc $\dim F_1 \leqslant 2$ donc $\dim F \neq 3 = \dim \mathbb{R}_3[X] - 1$ aussi $\boxed{F_1 \text{ n'est pas un hyperplan de } \mathbb{R}_3[X]}$

- $F_2 = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_2, Q_3)$ où polynômes $Q_1 = 1 + X$, $Q_2 = X + X^2$ et $Q_3 = X^2 + X^3$

  (Q_1, Q_2, Q_3) est une famille de polynômes échelonnés en degré donc elle est libre et c'est une base de F_2 donc $\dim F_2 = 3 = \dim \mathbb{R}_3[X] - 1$ et $\boxed{F_2 \text{ est bien un hyperplan.}}$

ii. Pour le sev précédent qui est un hyperplan, donner son équation dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

$$P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in F_2 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ P = \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a = \alpha \\ b = \alpha + \beta \\ c = \beta + \gamma \\ d = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b - a \\ \gamma = d \\ c = b - a + d \end{cases}$$

Pour avoir une solution, l'équation de compatibilité $c = b - a + d$ du système doit être satisfaite donc $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in F_2 \Leftrightarrow c = b - a + d$ et donc $\boxed{F_2 \text{ est le sev d'équation } a - b + c - d = 0}$

2. Dans cette question, on travaille dans $M_2(\mathbb{R})$.

- E_1 est le noyau de l'application linéaire f telle que : $\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $f(M) = b + c$.
- E_2 est le sev de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donner un vecteur non nul de E_1. Prouver que E_1 et E_2 sont des hyperplans de $M_2(\mathbb{R})$.
Donner une équation de chacun de ces hyperplans dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

<u>Pour E_1</u> : $E_1 = \left\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = 0\right\}$ aussi $\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in E_1}$ car $f(M_1) = 1 - 1 = 0$.

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow f(M) = 0 \Leftrightarrow b + c = 0$ donc $\boxed{E_1 \text{ est le sev de } M_2(\mathbb{R}) \text{ d'équation } b + c = 0 \text{ dans la base canonique}}$.

C'est une équation linéaire non triviale donc : $\boxed{E_1 \text{ est un hyperplan de } M_2(\mathbb{R})}$

OU BIEN $f \in \mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ et f n'est pas nulle donc $\mathrm{rg}(f) = 1$ ($\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R} \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, f \leqslant 1$ et $\dim \mathrm{Im}\, f \geqslant 1$ car f non nulle). Par le théorème du rang : $\dim E_1 = \dim \mathrm{Ker}\, f = \dim M_2(\mathbb{R}) - \mathrm{rg} f = \dim M_2(\mathbb{R}) - 1$ donc E_1 est bien un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$.

<u>Pour E_2</u> : On vérifie trivialement que la famille (A, B, C) est libre (à faire) donc c'est une base de E_2 aussi $\dim E_2 = 3 = \dim M_2(\mathbb{R}) - 1$ et $\boxed{E_2 \text{ est un hyperplan de } M_2(\mathbb{R})}$.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ M = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha \\ c = \gamma \\ d = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = b + c + d} \text{ (équation de compatibilité)}$$