EXERCICE N° 9/2

1. Identifier et représenter la courbe $\mathscr{C} : 2x^2+3xy+2y^2-4x-3y=0$ donnée dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$
On donne $\sqrt{7}\simeq 2,6$

• On identifie une conique associé à la matrice symétrique réelle $A=\begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & 2\end{pmatrix}$

$\det A = 4-\dfrac{9}{4}=\dfrac{16-9}{4}>0$ donc c'est une conique du genre ellipse éventuellement dégénérée en un point ou l'ensemble vide.

• *Disparition du terme croisé par rotation de la base*
On réalise un changement de bases orthonormées en réduisant orthogonalement A.
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x)=x^2-\mathrm{tr}(A)x+\det A = x^2-4x-\dfrac{7}{4}$
Son discriminant est $\Delta=16-4\times\frac{7}{4}=9=3^2$ donc les valeurs propres sont $\dfrac{4\pm 3}{2}$ soit $\mathrm{sp}(A)=\left\{\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right\}$ (Sécu : trace OK)
On sait que les deux sev propres $E_{\frac{1}{2}}$ et $E_{\frac{7}{2}}$ sont de dimension 1 et sont orthogonaux/
$E_{\frac{1}{2}}=\mathrm{Ker}\left(A-\frac{1}{2}I_2\right)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\mathrm{Vect}\big((1,-1)\big)$ puisque $C_1-C_2=0$ et $E_{\frac{7}{2}}=E_{\frac{1}{2}}^{\perp}=\mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$
La base orthonormée de diagonalisation est $\mathscr{B}'=(\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ et $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$
La matrice de passage est $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et : $P^TAP=D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$ et aussi :

$$X=PX' \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}\\ y=\dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\end{cases}$$ où $X'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ coordonnées dans $\mathscr{B}'$ et $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ celles dans la base $\mathscr{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$

La partie quadratique devient : $2x^2+3xy+2y^2=X^TAX=(PX')^TA(PX')=(X')^T\underbrace{P^TAP}_{=D}X'=\dfrac{(x')^2}{2}+\dfrac{7(y')^2}{2}$

La partie linéaire devient : $-4x-3y=-4\left(\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)-3\left(\dfrac{-x'+y'}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{x'}{\sqrt{2}}-\dfrac{7y'}{\sqrt{2}}$

Dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, l'équation de $\mathscr{C}$ devient : $\dfrac{(x')^2}{2}+\dfrac{7(y')^2}{2}-\dfrac{x'}{\sqrt{2}}-\dfrac{7y'}{\sqrt{2}}=0 \Leftrightarrow (x')^2+7(y')^2-\sqrt{2}x'-7\sqrt{2}y'=0$
en multipliant par 2 tous les coefficients : $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

• *Décalage du centre pour trouver une équation réduite*

$$(x')^2+7(y')^2-\sqrt{2}x'-7\sqrt{2}y' = \Leftrightarrow \underbrace{(x')^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x'}_{=\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{2}{4}}+7\underbrace{\left((y')^2+7\sqrt{2}y'\right)}_{=\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{2}{4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+7\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\underbrace{\left(\frac{2}{4}+\frac{14}{4}\right)}_{=4}\Leftrightarrow \frac{\left(x'-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}{2^2}+\frac{\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}=1$$

• Nature et éléments caractéristiques de $\mathscr{C}$: La courbe $\mathscr{C}$ est une ellipse.
Son centre Ω a pour coordonnées $(x'_0,y'_0)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ soit $(x_0,y_0)=(1,0)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
Ses axes de symétries sont les axes $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{v})$
Ses demi-axes valent $a=2$ sur $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $b=\dfrac{2}{\sqrt{7}}\simeq\dfrac{2}{\frac{5}{2}}\simeq\dfrac{4}{5}\simeq 0.8$ sur $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{v})$

2. Identifier et représenter la courbe $\mathscr{C}: x^2-5y^2+8xy-14x+28y-56=0$ donnée dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$
On donne $\sqrt{3}\simeq 1,7$, $\sqrt{5}\simeq 2,2$ et $\sqrt{7}\simeq 2,6$

• On identifie une conique associé à la matrice symétrique réelle $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & -5\end{pmatrix}$
$\det A=-5-16<0$: la conique est du genre hyperbole éventuellement dégénérée en deux droites sécantes.
• *Disparition du terme croisé par rotation de la base*
On réalise un changement de bases orthonormées en réduisant orthogonalement A.
Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x)=x^2-\text{tr}(A)x+\det A=x^2+4x-21$
Le discriminant est $\Delta=(-4)^2-4\times(-21)=4\big(4+21\big)=4\times 25=(2\times 5)^2$
aussi les racines de χ_A sont $\lambda=\dfrac{-4-2\times 5}{2}=-2-5=-7$ et $\mu=\dfrac{-4+2\times 5}{2}=-2+5=3$
On sait que les deux sev propres E_3 et E_{-7} sont orthogonaux et de dimension 1
$E_3=\text{Ker }(A-3I_2)=\text{Ker }\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -8\end{pmatrix}=\text{Vect}\big((2,1)\big)$ car on repère $2C_1+C_2=0$ et donc : $E_{-7}=\text{Vect}\big((-1,2)\big)$
La base orthonormée de diagonalisation est $\mathscr{B}'=\big(\vec{u},\vec{v}\big)$ où $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$ et $\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$
La matrice de passage est $P=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et : $P^TAP=D=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -7\end{pmatrix}$ et aussi :

$$X=PX'\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\\ y=\dfrac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\end{cases}\quad \text{où } X'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} \text{ coordonnées dans } \mathscr{B}' \text{ et } X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ celles dans la base } \mathscr{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$$

La partie quadratique devient : $x^2-5y^2+8xy=X^TAX=(PX')^TA(PX')=(X')^T\underbrace{P^TAP}_{=D}X'=3(x')^2-7(y')^2$

La partie linéaire devient : $-14x+28y=-14\left(\dfrac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\right)+28\left(\dfrac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\right)=_{1\times 14+2\times 28=(1+2\times 2)\times 28}\dfrac{5\times 14}{\sqrt{5}}y'=14\sqrt{5}y'$

Dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$, $\mathscr{C}$ a pour équation $3(x')^2-7(y')^2+14\sqrt{5}y'+3=0$

• *Décalage du centre pour trouver une équation réduite*

$$3(x')^2-7(y')^2+14\sqrt{5}y'-56=0\Leftrightarrow 3(x')^2-7\underbrace{\Big((y')^2-2\sqrt{5}y'\Big)}_{(y'-\sqrt{5})^2-5}-56=0\Leftrightarrow 3(x')^2-7(y'-\sqrt{5})^2+35-56=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x')^2-7(y'-\sqrt{5})^2=7\times 3$$

Ainsi, dans $(O,\vec{u},\vec{v})$, $\mathscr{C}$ a pour équation réduite $\dfrac{(x')^2}{(\sqrt{7})^2}-\dfrac{(y'-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3})^2}=1$

• Nature et éléments caractéristiques de $\mathscr{C}$: La courbe $\mathscr{C}$ est une hyperbole

Son centre Ω a pour coordonnées $(x'_0,y'_0)=\big(0,\sqrt{5}\big)$ dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ ou $(x_0,y_0)=\big(-1,2\big)$ dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
Ses axes de symétries sont les droites $\Omega+\text{Vect}(\vec{u})$ et $\Omega+\text{Vect}(\vec{v})$.
Les sommets sont sur l'axe $\Omega+\text{Vect}(\vec{u})$ à une distance de $\sqrt{7}\simeq 2,6$ de part et d'autre du centre Ω et les tangentes à ses sommets A et A$'$ sont perpendiculaires à l'axe.
Les asymptotes sont les droites $\Omega+\text{Vect}(\sqrt{7}\vec{u}+\sqrt{3}\vec{v})$ et $\Omega+\text{Vect}(\sqrt{7}\vec{u}-\sqrt{3}\vec{v})$: elle passe par le centre Ω et, dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est sont dirigées par les vecteurs $\begin{pmatrix}\sqrt{7}\\ \pm\sqrt{3}\end{pmatrix}$

EXERCICE N° 7 *Un exercice d'oral d'étude d'extrema*

On considère le fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(x+y)^2 - \dfrac{1}{6}(x^3+y^3)$.

1. Déterminer les points critiques de f.

La fonction f est polynômiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

• On cherche les extrema locaux parmi les points critiques : $\overrightarrow{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}x^2 \\ \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{grad} f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-x^2=0 \\ (x+y)-y^2=0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-x^2=0 \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-x^2=0 \\ (x-y)(x+y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x)=0 \\ x=y \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2=0 \\ x=-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x,y)=(0,0) \\ \text{ou} \\ (x,y)=(2,2) \end{cases} \quad \text{ou } (x,y)=(0,0)$$

2. En utilisant la matrice Hessienne, montrer que vous pouvez conclure sur la nature d'un des points critiques de f qu'on notera (x_0, y_0)

On étudie les deux points critiques $(0,0,)$ et $(2,2)$ à l'aide de la matrice Hessienne $H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}-y \end{pmatrix}$

<u>En $(0,0)$</u> : $\det H(0,0) = 0$ donc on ne peut pas conclure avec la matrice Hessienne en $(0,0)$

<u>En $(2,2)$</u> : $\det H(2,2) = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 > 0$ donc il y a un extremum local en $(2,2)$ puisque les deux valeurs propres λ et μ de la matrice Hessienne sont de même signe. De plus, $\lambda+\mu = \mathrm{tr}H(2,2) = -3 < 0$ donc les deux valeurs propres sont strictement négatives. Le signe de $f(2+h,2+k) - f(2,2)$ est localement celui de $\lambda(h')^2 + \mu(k')^2 < 0$: c'est donc un maximum local et $(x_0,y_0) = (2,2)$.

3. En utilisant un équivalent en l'infini de $f(x,x) - f(x_0,y_0)$, montrer que l'extremum en (x_0,y_0) n'est pas global.

$f(x,x) - f(x_0,y_0) = \dfrac{1}{4}(2x)^2 - \dfrac{1}{6}(2x^3) - f(2,2) = x^2 - \dfrac{x^3}{3} - f(2,2) \sim_{\pm\infty} -\dfrac{x^3}{3}$ aussi $f(x,x) - f(x_0,y_0) > 0$ lorsque x tend vers $-\infty$ aussi <u>le maximum local $f(x_0,y_0)$ n'est pas global</u>

4. Donner un équivalent simple de $f(x,-x+x^3)$ en 0. f admet-elle un extremum local en $(0,0)$.

$f(x,-x+x^3) = \dfrac{1}{4}x^6 - \dfrac{1}{6}\left(x^3 + (-x+x^3)^3\right)$ aura pour équivalent en 0 le terme de plus bas degré de cette expression polynômiale : $f(x,-x+x^3) = \dfrac{1}{4}x^6 - \dfrac{1}{6}\left(x^3 + \left(-x^3 + 3x^2x^3 + 3(-x)x^6 + x^9\right)\right)$ $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Aussi : $\boxed{f(x,-x+x^3) \sim_0 -\dfrac{x^5}{2}}$

Pour savoir si f admet un extremum local en $(0,0)$, on étudie localement le signe de $\Delta_{x,y} = f(x,y) - f(0,0)$

Or : $\Delta_{x,-x+x^3} = f(x,-x+x^3) \sim_0 -\dfrac{x^5}{2}$ change de signe avec x localement près de 0 : le point $(0,0)$ est donc un point col et <u>il n'y a pas d'extremum en $(0,0)$</u>

5. Pourquoi f admet forcément des extrema sur $[0,1]^2$? Déterminer les extrema de f sur $[0,1]^2$

f est une fonction C^0 sur le domaine fermé $D = [0,1]^2$ donc elle admet forcément un maximum et un minimum (voir cours FPV). D'après ce qui précède, il n'y a aucun extrema dans l'ouvert $]0,1[^2$ donc les extrema sont sur les bords. Comme $f(x,y) = f(y,x)$, il suffit de rechercher les extrema sur $[0,1]$ des fonctions $\phi = [t \mapsto f(t,0)]$ et $\psi = [t \mapsto f(t,1)]$ (car $[t \mapsto f(0,t)]$ aura les même extrema que ϕ et $[t \mapsto f(1,t)]$ aura les même extrema que ψ)

$\phi(t) = f(t,0) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t^3}{6}$ aussi ϕ est dérivable sur $[0,1]$ avec $\phi'(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} = \frac{t}{2}(1-t) \geqslant 0$ sur $[0,1]$ d'où $\min\phi = \phi(0) = 0$ et $\max\phi = \phi(1) = \dfrac{1}{12}$

$\psi(t) = f(t,1) = \dfrac{1}{4}(t+1)^2 - \dfrac{1}{6}(t^3+1)$ aussi ψ est dérivable sur $[0,1]$ avec $\psi'(t) = \frac{1}{2}(t+1) - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(1+t-t^2) \geqslant 0$ sur $[0,1]$ $\Delta = 5$, les racines sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ d'où signe de $-(-1)$ entre les racines)

d'où $\min\psi = \psi(0) = \frac{1}{12}$ et $\max\psi = \psi(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Finalement : $\boxed{\min_{[0,1]^2} f = 0 \text{ et } \max_{[0,1]^2} f = \dfrac{2}{3}}$

EXERCICE N° 6 Discuter, suivant la valeur du paramètre réel a, la nature de la conique $\mathscr{C}_a$ d'équation

$$\mathscr{C}_a : \quad (a+1)(x^2+y^2)-2(a-1)xy+\sqrt{2}(x+y)=0$$

On fait un changement de repère pour faire disparaître les termes croisés:la matrice associée est

$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1+a & a-1 \\ a-1 & 1+a \end{pmatrix}$ d'où $\det \mathrm{A}=\left((a+1)^2-(a-1)^2\right)=2(2a)=4a$ et il y a 3 cas à distinguer:

Si $a>0$ alors $\det \mathrm{A}>0$ donc la conique est du genre ellipse (éventuellement dégénérée)

Si $a=0$ alors $\det \mathrm{A}=0$ donc la conique est du genre parabole (éventuellement dégénérée)

Si $a<0$ alors $\det \mathrm{A}<0$ donc la conique est du genre hyperbole (éventuellement dégénérée)

Pour $a\in\mathbb{R}$, les valeurs propres vérifient: $\begin{cases} \lambda+\mu=2(1+a) \\ \lambda\mu=4a \end{cases}$ et sont les racines de $\chi_{\mathrm{A}}(x)=x^2-2(1+a)x+4a$

On remarque que $\lambda=2$ est une racine évidente. L'autre racine est $(2+2a)-2=2a$

Elles sont distinctes si $a\neq 1$. Dans ce cas, puisque A est symétrique donc les sev propres sont de dimension 1

Pour $a=1$: il n'y a pas de termes croisés dans l'équation $\mathscr{C}_1$ et directement

$\mathscr{C}_1 : x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(y+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=2\times\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{4}$ et $\mathscr{C}_1$ cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ de rayon $\dfrac{1}{2}$

Pour $a\neq 1$: Puisque A est symétrique avec 2 vp distinctes, les sev propres sont de dimension 1

$\mathrm{E}_2=\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_2)=\mathrm{Ker}\,\left((a-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}((1,1))$ et $\mathrm{E}_{2a}=\mathrm{E}_2^{\perp}=\mathrm{Vect}((-1,1))$.

Notons $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ et $\vec{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\jmath}-\vec{\imath})$, $\mathscr{B}'=(\vec{u},\vec{v})$ et: $\mathrm{P}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$

$\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{AP}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$ et avec $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\mathrm{P}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ l'équation de $\mathscr{C}_a$ devient:

$\mathscr{C}_a : 2(x')^2+2a(y')^2+(x'-y')+(x'+y')=0 \Leftrightarrow (x')^2+a(y')^2+x'=0 \Leftrightarrow \left(x'+\dfrac{1}{2}\right)^2+a(y')^2=\dfrac{1}{4}$

• Si $a=0$: $\mathscr{C}_0 : \left(x'+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ est la réunion de deux droites parallèles:

la première d'équation $x'=0$ est la droite $\mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\vec{v})$, la seconde a pour équation $x'=-1$ dans $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$

• Si $a\neq 0$: $\mathscr{C}_a : \dfrac{\left(x'+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{(y')^2}{\frac{1}{4a}}=1$ Le centre Ω de la conique a pour coordonnées $\mathrm{P}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$

Si $a>0$: $\mathscr{C}_a$ est une ellipse de centre Ω, de demi-axe $\dfrac{1}{2}$ sur l'axe de symétrie $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ sur l'axe $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{v})$.

On retrouve bien le cercle prévu dans le cas $a=1$...

Si $a<0$: $\mathscr{C}_a$ est hyperbole de centre Ω, d'axe de symétrie $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{v})$. Les sommets sont sur $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ à une distance $\dfrac{1}{2}$ de Ω. Les asymptotes sont les droites $\Omega+\mathrm{Vect}\left(\frac{1}{2}\vec{u}\pm\frac{1}{2\sqrt{|a|}}\vec{v}\right)=\Omega+\mathrm{Vect}\left(\sqrt{|a|}\,\vec{u}\pm\vec{v}\right)$

Attention! Le théorème spectral concerne **matrices symétriques réelles!**

Construction d'un contre-exemple dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{C})$:

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice symétrique d'ordre 2 à coefficients complexes soit non diagonalisable. Préciser alors un exemple concret de matrice symétrique complexe non diagonalisable.

On se donne $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ non diagonalisable où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.

Le polynôme caractéristique χ_A de A est : $\chi_A(x) = (a-x)(c-x) - b^2 = x^2 - (a+c)x + ac - b^2$

Si χ_A a deux racines distinctes (càd $\Delta \neq 0$) alors χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ et donc A serait diagonalisable. Ainsi, il doit forcément avoir une racine double et donc le discriminant $\Delta = 0$ soit :

$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-c)^2 + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-c-2ib)(a-c+2ib) = 0 \Leftrightarrow a = c+2ib$ ou $a = c-2ib$

Par ailleurs, la racine double $\lambda = \dfrac{a+c}{2}$ doit être associé à un espace propre de dimension 1 (car si de dimension 2, A serait diagonalisable) aussi, par le théorème du rang, on sait que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = 2 - \dim \mathrm{Ker}\,(A - \alpha I_2) = 1$

Mais : $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2} & b \\ b & \frac{c-a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 2ib & b \\ b & \mp 2ib \end{pmatrix}$ Si $b = 0$ alors $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = 0$ Si $b \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) \geqslant 1$

Mais, puisque λ est vp, on sait déjà que $\dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_2) \geqslant 1 \Rightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_2) \leqslant 1$ donc, si $b \neq 0$, $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = 1$

Finalement, on a obtenue la condition nécessaire et suffisante :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{C}) \text{ non diagonalisable} \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ et } a = c \pm 2ib}$$

En prenant : $c = -1$ et $b = i$ on trouve $a = 1 - 2i^2 = 1$ de sorte que $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est un contre-exemple.

Attention! Le théorème spectral concerne **matrices symétriques réelles!**

Construction d'un contre-exemple dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{C})$:

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice symétrique d'ordre 2 à coefficients complexes soit non diagonalisable. Préciser alors un exemple concret de matrice symétrique complexe non diagonalisable.

On se donne $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ non diagonalisable où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$.

Le polynôme caractéristique χ_A de A est : $\chi_A(x) = (a-x)(c-x) - b^2 = x^2 - (a+c)x + ac - b^2$

Si χ_A a deux racines distinctes (càd $\Delta \neq 0$) alors χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ et donc A serait diagonalisable. Ainsi, il doit forcément avoir une racine double et donc le discriminant $\Delta = 0$ soit :

$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-c)^2 + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-c-2ib)(a-c+2ib) = 0 \Leftrightarrow a = c+2ib$ ou $a = c-2ib$

Par ailleurs, la racine double $\lambda = \dfrac{a+c}{2}$ doit être associé à un espace propre de dimension 1 (car si de dimension 2, A serait diagonalisable) aussi, par le théorème du rang, on sait que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = 2 - \dim \mathrm{Ker}\,(A - \alpha I_2) = 1$

Mais : $A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{2} & b \\ b & \frac{c-a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 2ib & b \\ b & \mp 2ib \end{pmatrix}$ Si $b = 0$ alors $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = 0$ Si $b \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) \geqslant 1$

Mais, puisque λ est vp, on sait déjà que $\dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_2) \geqslant 1 \Rightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_2) \leqslant 1$ donc, si $b \neq 0$, $\mathrm{rg}(A - \lambda I_2) = 1$

Finalement, on a obtenue la condition nécessaire et suffisante :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_2(\mathbb{C}) \text{ non diagonalisable} \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ et } a = c \pm 2ib}$$

En prenant : $c = -1$ et $b = i$ on trouve $a = 1 - 2i^2 = 1$ de sorte que $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est un contre-exemple.
