PT : Correction du TD n°3 sur le chapitre X

EXERCICE 4 Justifier l'existence et déterminer le développement en série entière de

- On commence par déterminer le domaine de définition de $f$ qui donne une limitation du domaine $]-r,r[$ où on pourra développer en série entière.
- On repère des DSE usuels quitte à transformer l'expression (propriétés des logarithmes, décomposition en éléments simples, utilisation d'exponentielles complexes) et à envisager des changements de variables)
- On peut chercher le DSE d'une primitive puis utiliser le théorème de dérivation terme à terme ;
- On peut chercher le DSE de la dérivée puis utiliser le théorème d'intégration terme à terme.

**1.** $f(x)=\ln\dfrac{1-2x}{3-x}$

Domaine de définition : $\dfrac{1-2x}{3-x}=\dfrac{(1-2x)(3-x)}{(3-x)^2}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x\neq 0\\ (1-2x)(3-x)>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup]3,+\infty[=D$

Cela induit forcément que $r\leqslant\dfrac{1}{2}$ pour avec $]-r,r[\subset D$

Pour $1-2x>0$ et $3-x>0$ soit si $x<\dfrac{1}{2}$, on a : $f(x)=\ln(1-2x)-\ln(3-x)=\ln(1-2x)-\ln 3-\ln\left(1-\dfrac{x}{3}\right)$

On reconnaît des DSE usuel : $-\ln(1-u)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$ pour $|u|<1$ qu'on utilise avec $u=2x$ et $u=\dfrac{x}{3}$

$|2x|<1\Leftrightarrow|x|<\dfrac{1}{2}$ et $\left|\dfrac{x}{3}\right|<1\Leftrightarrow|x|<3$ donc, finalement, si $|x|<\dfrac{1}{2}$, $f(x)$ existe et les deux séries CV et on a :

$$f(x)=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2x)^k}{k}-\ln 3+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k3^k}=-\ln 3+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3^k}-2^k\right)\frac{x^k}{k}$$

**2.** $f(x)=(\operatorname{ch}x)(\cos x)$

Pour $x\in\mathbb{R}$ : $\operatorname{ch}x=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et $\cos x=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$

Donc, par produit de Cauchy, $f$ est DSE avec un rayon de convergence $+\infty$ (car $\geqslant\min(+\infty,+\infty)$)

Par contre, l'expression du développement sera fastidieux par la formule du produit de Cauchy :

$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n$ où $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ avec $a_n=\begin{cases}\frac{1}{(2k)!} & \text{si } n=2k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ et $b_n=\begin{cases}\frac{(-1)^k}{(2k)!} & \text{si } n=2k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Pour le calcul, il est préférable d'utiliser les exponentielles complexes car, pour tout $x$ réel :

$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\times\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\dfrac{1}{4}\left(e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{-(1-i)x}+e^{-(1+i)x}\right)$ or $e^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$

Toutes les séries étant convergentes, on peut les regrouper par linéarité et on a :

$$f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((1+i)^n+(1-i)^n+(-1)^n(1-i)^n+(-1)^n(1+i)^n\right)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+(-1)^n\right)\left((1+i)^n+(1-i)^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

Le terme $1+(-1)^n$ s'annule lorsque $n=2k+1$ et vaut 2 lorsque $n=2k$ donc :

$f(x)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}2\left((1+i)^{2k}+(1-i)^{2k}\right)\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ mais $\begin{cases}(1-i)^2=-2i\\(1+i)^2=2i\end{cases}$ donc

$(1+i)^{2k}+(1-i)^{2k}=\left(1+(-1)^k\right)(2i)^k=\left(1+(-1)^k\right)2^k\times i^k$

Ce terme s'annule pour $k=2l+1$ et, pour $k=2l$, il vaut : $2\times 2^{2l}\times i^{2l}=2\times 4^l\times(-1)^l$ car $i^{2l}=(i^2)^l$

Finalement, pour tout $x$ réel : $f(x)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty}2\times 2\times 4^l\times(-1)^l\times\frac{x^{4l}}{(4l)!}=\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{4^l}{(4l)!}x^{4l}$

EXERCICE N° 5 Justifier que $\left[f:x\mapsto\displaystyle\int_0^x\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right]$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées successives en 0.

On va justifier que $f$ est DSE avec un rayon de convergence $R=+\infty$

Pour cela, on remarque de $f$ est une primitive de la fonction $\varphi$ où $\varphi(t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ si $t\neq 0$ qu'on peut prolonger par continuité en $t=0$ : $\varphi(t)\sim_0\dfrac{\frac{t^2}{2}}{t^2}=\dfrac{1}{2}\xrightarrow[t\to 0]{}\dfrac{1}{2}$ et il suffit de prendre $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$.

On sait, d'après le cours, que : $\forall t\in\mathbb{R}$, $\cos t=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$ aussi $1-\cos t=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}$

puis, pour $t\neq 0$ : $\varphi(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}t^{2n-2}\underset{k=n-1}{=}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+2}}{(2k+2)!}t^{2k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!}t^{2k}$ *

Les deux membres coïncident aussi pour $t=0$ : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{(-1)^0}{(0+2)!}$

On a donc justifié que $\varphi$ est DSE avec un rayon de convergence $R=+\infty$

En intégrant terme à terme, on obtient le DSE de $f$ avec le même rayon de convergence : $f(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!}\frac{t^{2k+1}}{2k+1}$

et, de ce fait, cela justifie bien que $\boxed{f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}}$

Attention ! la primitive s'annulant en $t=0$ de $t^{2k}$ est $\dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et rien d'autre...!

On note $a_{2k}=0$ et $a_{2k+1}=\dfrac{(-1)^k}{(2k+2)!}\times\dfrac{1}{2k+1}$ les coefficients du DSE.

On sait, d'après le cours, que : $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ de sorte que :

$$\boxed{f^{(2k)}(0)=0 \text{ et } f^{(2k+1)}(0)=(2k+1)!a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)}}$$