

EXERCICE N° 3 Étudier et construire la courbe Γ : $\begin{cases} x(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right) \ln t \\ y(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right) \ln t \end{cases}$. On pourra rechercher une transformation géométrique permettant de construire le point de paramètre $\frac{1}{t}$ à partir du point de paramètre t et en déduire une réduction du domaine d'étude.

On note $M(t)$ le point de paramètre t de coordonnées $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Définition et domaine d'étude : x et y sont C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Il n'y a pas de parité ou de périodicité. Par contre, pour $t > 0$, on a : $x(\frac{1}{t}) = -x(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = y(t)$.

Les points $M(t)$ et $M(\frac{1}{t})$ sont donc symétriques par rapport à l'axe $O + \text{Vect}(\vec{j})$.

Il suffit d'étudier la courbe pour $t \in]0, 1] = D$ pour obtenir par symétrie le tracé pour $t \in [1, +\infty[$.

Commentaires : En effet : $t \in]0, 1] \Leftrightarrow \frac{1}{t} \in [1, +\infty[$

Variations communes sur D : $\forall t \in]0, 1[, x'(t) = \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \ln t + \underbrace{\left(t + \frac{1}{t}\right) \times \frac{1}{t}}_{>0}$ et $\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \ln t = \underbrace{\frac{1 - t^2}{t}}_{\leq 0} \times \underbrace{\ln t}_{\geq 0} \geq 0$

Commentaires : Pas de factorisation possible donc on examine le signe de chacun des termes

Par somme de termes positifs dont l'un est strictement positif : $x'(t) > 0$ sur D

De même : $y'(t) = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \ln t + \underbrace{\left(t - \frac{1}{t}\right) \times \frac{1}{t}}_{\leq 0} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \ln t + \frac{1}{t^2}}_{\leq 0} \leq 0$ soit $y'(t) \leq 0$ sur D

et : $y'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \ln t = 0 \Leftrightarrow \ln t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ soit $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Commentaires : une somme de termes de même signe est nulle si tous les termes sont nuls

Limites et valeurs extrêmes : Comme $\ln 1 = 0$, on a : $x(1) = y(1) = 0$

t	0	1
$x'(t)$		$+$
x		0
	$-\infty$	$\nearrow$
y	$+\infty$	$\searrow$
$y'(t)$		$-$

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{t} \ln t \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{OU BIEN} \quad x(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right) \times \frac{\ln t}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

$$y(t) = \frac{t^2 - 1}{t} \ln t \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{OU BIEN} \quad y(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right) \times \frac{\ln t}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} -\infty \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} +\infty$$

Commentaires : Il s'agit ici d'une limite usuelle $\infty \times \infty$ qui n'est pas indéterminée. Invoquer un résultat de croissance comparée pour conclure est donc hors sujet...

• Il y a une tangente horizontale à l'origine $O = M(1)$ Commentaires : car $y'(1) = 0$ mais $x'(1) \neq 0$

• Il y a une branche infinie si $t \rightarrow 0$: $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -1$ puis $y(t) + x(t) = 2t \ln t \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0$ ainsi

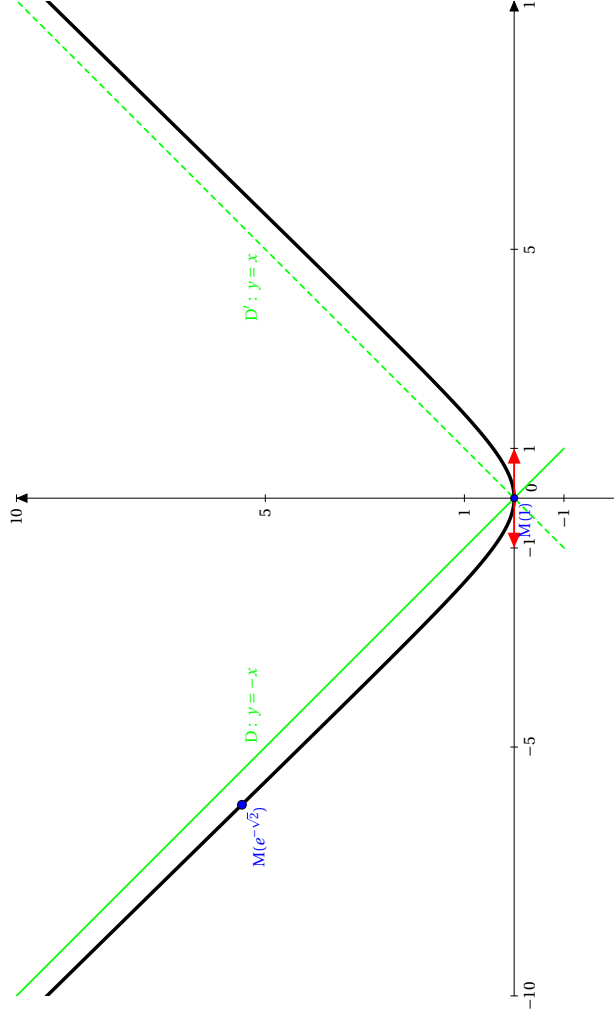
il y a une asymptote d'équation $y = -x$ et $y(t) + x(t) = 2t \ln t < 0$ en 0^+ donc la courbe est sous l'asymptote.

• Le tracé amène à envisager l'existence d'un point d'inflexion qui ne serait pas stationnaire (ie $p = 1$ impair et q impair). En ce point $M(t)$, on aura donc $f'(t)$ et $f''(t)$ colinéaire (car $q \geq 3$).

On résout donc sur $]0, 1[$ $\det(f'(t), f''(t)) = 0$ Après un peu de calcul, on trouve : $\det(f'(t), f''(t)) = \frac{8 - 4(\ln t)^2}{t^3}$

Aussi : $\det(f'(t), f''(t)) = 0 \Leftrightarrow (\ln t)^2 = 2 \Leftrightarrow |\ln t| = \sqrt{2} \Leftrightarrow -\ln t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \ln t = -\sqrt{2} \Leftrightarrow t = e^{-\sqrt{2}} = a$

Le point $M(a)$ est un point d'inflexion de coordonnées : $x(a) = 2\text{ch}(\sqrt{2}) \times -\sqrt{2} \approx -6,16$ et $y(a) = -2\text{sh}(\sqrt{2}) \times -\sqrt{2} \approx 5,47$



EXERCICE N°5 Étudier et construire la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = (1 + \sin t) \cos t \end{cases}$

On note $M(t)$ le point de paramètre t de coordonnées $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Définition et domaine d'étude : x et y sont C^∞ sur $\mathbb{R}$

- x et y sont 2π périodique donc une étude sur un intervalle d'amplitude 2π suffit

- La parité n'aboutit pas mais $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ donc les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $O + \text{Vect}(\vec{T})$ aussi on peut mener l'étude sur $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ car par symétrie on obtiendra la courbe sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et donc le tracé sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ d'amplitude 2π en effet : $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \pi - t \leq \frac{3\pi}{2}$

Commentaires : Le domaine d'amplitude 2π doit être centré au milieu de t et $\pi - t$ soit en $\frac{\pi}{2}$ pour exploiter la symétrie

Variations communes sur D : On a : $x'(t) = -2 \cos t \sin t$ et $y'(t) = \cos^2 t - (1 + \sin t) \sin t = 1 - \sin t - 2 \sin^2 t$
 Sur $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0$ ou $\sin t = 0$ soit $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ ou $t = 0$

De plus : $\cos t \geq 0$ donc $x'(t)$ a le signe opposé de $\sin t$ donc : $x'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Factorisons $y'(t)$: on remarque que $y'(t) = P(\sin t)$ où $P = 1 - X - 2X^2$ or P admet -1 pour racine évidente, l'autre racine est $\frac{1}{2}$ d'où $P = -2(X + 1)(X - \frac{1}{2})$ et ainsi : $y'(t) = -2(\sin t + 1)(\sin t - \frac{1}{2})$

Par suite, sur D : $y'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = -1$ et $\sin t = \frac{1}{2}$ soit $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{\pi}{6}$

De plus : $\sin t + 1 \geq 0$ donc $y'(t)$ a le signe de $\frac{1}{2} - \sin t$ aussi : $y'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$

t	$-\pi/2$	0	$\pi/6$	$\pi/2$
$x'(t)$	0	+	-	0
x	0	↗	3/4	↘
y	0	↗	$3\sqrt{3}/4$	↘
$y'(t)$	0	+	+	0

Commentaires : on a aussi $y'(t) = \cos(2t) - \sin t$
 et chercher les zéros de $y'(t)$ via la résolution de $\cos(2t) = \sin t$
 où on se ramène à une équation de référence $\cos x = \cos a$:

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(2t) = \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow 2t \equiv \frac{\pi}{2} - t \pmod{2\pi} \text{ ou } 2t \equiv -\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \text{ ou } t \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\text{et donc, sur } D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right] : y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } t = \frac{\pi}{6}$$

Toutefois, cette approche n'est plus pertinente pour l'étude du signe...

Branches infinies Il n'y a pas de branches infinies.

Tangentes particulières Il y a une tangente verticale en $M(0) = (1, 1)$ et en $M(\pi/2) = 0$

Il y a une tangente horizontale en $M(\pi/6) = (3/4, 3\sqrt{3}/4)$. Il y a un point stationnaire en $M(-\pi/2) = 0$.

On pose $h = t + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{t \rightarrow -\pi/2} 0$ alors :

$$f(t) = f\left(h - \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sin^2 h \\ (1 - \cos h) \sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h + o(h^2))^2 \\ (h^2 + o(h^2))(h + o(h)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2/2 \\ h^3/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix}$$

La première dérivée non nulle est $f^{(2)}(-\pi/2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc la tangente est horizontale en $M(-\pi/2) = 0$ et $p = 2$

La dérivée suivante non colinéaire est pour $q = 3$ donc c'est un point de rebroussement de première espèce.

