

EXEMPLE N° 9 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 13 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

1. Calculer l'image par f de $P = -X^2 + 3X + 2$. Que peut-on en déduire pour l'application f ?

Les coordonnées de P dans $\mathcal{B}_{can} = (1, X, X^2)$ sont $X_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ aussi les coordonnées de $f(P)$ sont $AX_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Le polynôme P est donc dans $\ker f$ et $P \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\} : f$ n'est pas injective.

Autre rédaction possible: $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f(P)) = A \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(P) = A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P = 0 + 0 \times X + 0 \times X^2 = 0$

2. Préciser le noyau et l'image de f .

Notons c_1, c_2, c_3 les colonnes de A . On remarque que : $2c_1 + 3c_2 - c_3 = 0$. De plus, c_2 et c_3 sont non colinéaires. Aussi: $\text{Im } A = \text{Vect}(c_1, c_2, c_3) = \text{Vect}(c_2, c_3)$ de dimension 2 donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ et on obtient une base de $\text{Im } f$ si on trouve deux vecteurs de $\text{Im } f$ non colinéaires. Les colonnes c_2 et c_3 de A donnent les coordonnées de $f(X)$ et $f(X^2)$ qui sont ainsi deux vecteurs de $\text{Im } f$ non colinéaires.

Ainsi: $\text{Im } f = \text{Vect}(-2 - 4X - 8X^2, -2X^2) = \text{Vect}(1 + 2X + 4X^2, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ (en simplifiant par colinéarité les vecteurs)
Par le théorème du rang, on a: $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}_2[X] - \text{rg } f = 3 - 2 = 1$ or on connaît un vecteur non nul de $\ker f$ qui est de dimension 1 donc on connaît une base de $\ker f$ et $\ker f = \text{Vect}(P)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Attention au SENS: $\text{Im } A$ et $\ker A$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$ alors que $\text{Im } f$ et $\ker f$ sont des sev de $\mathbb{R}_2[X]$...

3. Donner la matrice canoniquement associée à $f + id$. En déduire un polynôme Q de $\ker(f + id)$.

$f + id$ est canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 13 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ et on remarque que : $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vu que $C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$

On en déduit que $Q = 1 + 2X + X^2 \in \ker(f + id)$.

On répond à la question posée: ce n'est pas la peine de déterminer le noyau en totalité !

4. Proposer de même un polynôme R de $\ker(f - 2id)$.

$f - 2id$ est canoniquement associée à $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 13 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ aussi $(f - 2id)(X^2) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ et $R = X^2 \in \ker(f - 2id)$.

Une colonne de 0 dans une matrice donne systématiquement un vecteur du noyau !

5. Prouver que $\mathcal{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice A' de f dans cette base.

On vérifie que $\mathcal{B}' = (P; Q; R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Comme $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ il suffit de justifier que la famille est libre.

Méthode n° 1 (pour les 5/2...et bientôt pour les 3/2): on utilise un déterminant car

(P, Q, R) libre $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}_{can}}(P; Q; R) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(P, Q, R)$ est inversible (la matrice de passage est inversible)

Or: $\det_{\mathcal{B}_{can}}(P; Q; R) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 1 \neq 0$.

Méthode n° 2: on revient à la définition de l'indépendance linéaire

$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha P + \beta Q + \gamma R = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

un polynôme est nul si ces coefficients le sont

Pour obtenir A' , on utilise la définition de $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et on exploite les informations obtenues dans le sujet

$\begin{cases} f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ f(Q) = -Q \text{ car } Q \in \ker(f + id) \\ f(R) = 2R \text{ car } R \in \ker(f - 2id) \end{cases} \text{ donc } A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(P), f(Q), f(R)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

6. Préciser les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Exprimer A' à l'aide de A et P .

Si $M = P_{\mathcal{B}_{can} \rightarrow \mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q, R) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{can}}$ (à faire)

La formule de changement de bases pour les endomorphismes s'écrit alors: $A' = M^{-1}AM$.

Le choix de la notation M pour la matrice de passage est lié au fait que les notations P, Q et R sont déjà utilisés. Pour obtenir M^{-1} , vous pouvez utiliser l'algorithme du pivot de Gauss...ou pas. Voici une autre approche:

Détermination de $M^{-1} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{can}}$:

Par définition, $M^{-1} = \text{Mat}_{(P, Q, R)}(1, X, X^2)$ où $P = -X^2 + 3X + 2$, $Q = 1 + 2X + X^2$ et $R = X^2$

Alors: $X^2 = R = R = 0 \times P + 0 \times Q + 1 \times R$ d'où la colonne 3 de M^{-1}

Ensuite, on peut éliminer le terme constant par:

$2Q - P = 3X^2 + X = 3R + X \Rightarrow X = -P + 2Q - 3R$ d'où la colonne 2 de M^{-1}

Enfin, on isole la constante dans Q et on exploite les relations précédentes:

$1 = Q - 2X - X^2 = Q - 2(-P + 2Q - 3R) - R = 2P - 3Q + 5R$ d'où la colonne 1 de M^{-1}

Point méthode : projecteur/symétrie

- Si on vous demande de reconnaître géométriquement un endomorphisme f remarquable, il s'agit alors d'identifier une homothétie, une projection ou une symétrie (éventuellement orthogonale à suivre) ou enfin une rotation (à suivre) en utilisant les caractérisations du cours qu'on vérifie, en général, à l'aide d'une matrice A de f (soit donnée par le sujet soit qu'on commence par déterminer dans une base simple canonique par ex).
On n'oublie pas : 1) de souligner que l'application f est un endomorphisme (il suffit bien souvent de l'écrire)
2) de traduire sur f le calcul matriciel : $A^2 = A \Leftrightarrow f \circ f = f$ ou $A^2 = f \circ f = id$
3) de bien donner les caractéristiques géométriques :
le rapport pour une homothétie
projecteur sur ... parallèlement à ...
symétrie par rapport à ... parallèlement à ...
rotation d'axe ... et d'angle ...
- Si on vous demande de donner la matrice dans une base $\mathcal{B}$ d'un endomorphisme f remarquable, il s'agit d'abord de déterminer la matrice A' dans une base $\mathcal{B}'$ adaptée à l'endomorphisme (celle adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ pour le projecteur sur F parallèlement à G par exemple) puis de réaliser un changement de bases pour obtenir la matrice voulu (avec la relation de changement de base $A' = P^{-1}AP$ avec $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$)

EXEMPLE N° 10 Dans $\mathbb{R}^4$ où on note (x, y, z, t) les coordonnées dans la base canonique.

1. Identifier géométriquement l'endomorphisme q canoniquement associé à la matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'abord, d'après le sujet, $q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ (puisque associée à une matrice de $M_4(\mathbb{R})$)

et on vérifie que $Q^2 = Q \Leftrightarrow q \circ q = q$ donc q est un projecteur de $\mathbb{R}^4$.

On sait que q est le projecteur sur $\text{Im } q = \text{Im } Q$ parallèlement à $\text{Ker } q = \text{Ker } Q$ (car matrice canoniquement associée à $q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$). Précisons l'image et le noyau: on note C_i la colonne i de la matrice Q

$\text{Im } q = \text{Im } Q = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{Vect}(C_1, C_4)$ avec (C_1, C_4) libre puisque $C_1 + C_3 = 0 = C_2$ donc $\text{rg}(q) = 2$

Par le théorème du rang: $\dim \text{Ker } q = 4 - 2 = 2$ et les relations $C_1 + C_3 = 0$ et $C_2 = 0$ donnent que $(1, 0, -1, 0)$ et $(0, 1, 0, 0)$ sont dans $\text{Ker } q$. Ces vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base de $\text{Ker } q$

q est le projecteur sur $\text{Im } q = \text{Vect}((2, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ parallèlement à $\text{Ker } q = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0))$

On considère le sous-espace vectoriel F donné par les équations $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$

2. Prouver que F et G sont supplémentaires.

Préciser la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.

$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (x, -x, z, x) = x(1, -1, 0, 1) + z(0, 0, 1, 0)$ d'où $F = \text{Vect}((1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$

Les familles $((1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$ et $((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1))$ sont libres car constituées de 2 vecteurs non colinéaires aussi $\dim F = \dim G = 2$

En outre: $(x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ et $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (a, a, -b, b)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$ et $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = (a, a, -b, b) \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$

Ainsi: $\begin{cases} F \cap G = \{(0, 0, 0, 0)\} \\ \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4 \end{cases} \Leftrightarrow F \oplus G = \mathbb{R}^4$ autrement dit F et G sont supplémentaires

On pose: $\varepsilon_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 0, 0)$ et $\varepsilon_4 = (0, 0, -1, 1)$

$\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base adaptée à $E = F \oplus G$ dans laquelle le projecteur a pour matrice $\Delta = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$

On connaît la matrice de passage P entre la base canonique et $\mathcal{B}'$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par la formule de changement de bases: $\Delta = P^{-1}AP$ où A est la matrice cherchée soit $A = P\Delta P^{-1}$

Calcul de P^{-1} : $\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 - e_2 + e_4 \\ \varepsilon_2 = e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 + e_2 \\ \varepsilon_4 = -e_3 + e_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = 2e_2 - e_4 \\ e_3 = \varepsilon_2 \\ e_1 = \varepsilon_3 - e_2 \\ e_4 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4) \\ e_3 = \varepsilon_2 \\ e_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \\ e_4 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \end{cases}$

soit $P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis $A = P\Delta P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

3. Donner la matrice S dans la base canonique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

Rappel: si $x = x_F + x_G$, $p(x) = x_F$ et $s(x) = x_F - x_G = 2x_F - (x_F + x_G) = 2p(x) - x$ aussi $S = 2A - I_4$

4. Justifier qu'il existe une matrice inversible P qu'on précisera telle que $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$

On reconnaît une formule de changement de bases où D est la base adaptée à la symétrie.

La base $\mathcal{B}'$ est adaptée à la symétrie car $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de F et $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ une base de G .

En utilisant la matrice P de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ calculée précédemment, on trouve bien $P^{-1}SP = D$