PT : Correction du TD n° 2 sur le chapitre VIII

Calculs de dérivées partielles de fonctions composées

EXERCICE N° 3 Si $[f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}]$ est de classe C^1, calculer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f lorsque

1. $g(x,y)=f(x^2,xy)$ $\quad \boxed{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2,xy)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2,xy) \quad\text{et}\quad \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2,xy)}$

2. $g(x,y)=xf(xy,x^2)$ $\quad \boxed{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=f(xy,x^2)+xy\dfrac{\partial f}{\partial x}(xy,x^2)+2x^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(xy,x^2) \quad\text{et}\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2\dfrac{\partial f}{\partial x}(xy,x^2)}$

3. $g(x,y)=f\big(f(y,y),x\big)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}\big(f(y,y),x\big)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\big(f(y,y)\big)\times\frac{\partial f}{\partial x}\big(f(y,y),x\big)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(y,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(y,y)\right)\times\frac{\partial f}{\partial x}\big(f(y,y),x\big)$$

EXEMPLE 10 **Un grand classique !**

Pour $[f:(x,y)\mapsto f(x,y)]$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on pose $g(r,\theta)=f(r\cos\theta;r\sin\theta)$.
Prouver que g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées premières et secondes de g à l'aide des dérivées de f

On pose $x(r,\theta)=r\cos\theta$ et $y(r,\theta)=r\sin\theta$
Par les théorèmes usuels, x et y sont C^2 sur $\mathbb{R}^2$ donc, par composition, g est bien C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial r}\ \text{soit :}\ \boxed{\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\times\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\times\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial \theta}\ \text{soit :}\ \boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\times\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\times\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$$

puis :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right)=(\cos\theta)\left(\cos\theta\times\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\times\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)$$
$$+(\sin\theta)\left(\cos\theta\times\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)$$

soit : $\boxed{\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=(\cos\theta)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(\sin\theta)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(2\sin\theta\cos\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

(Les dérivées croisées sont égales à cause du théorème de Schwarz)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right)=(-r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)-(r\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$
$$+(-r\sin\theta)\left((-r\sin\theta)\times\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(r\cos\theta)\times\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)$$
$$+(r\cos\theta)\left((-r\sin\theta)\times\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(r\cos\theta)\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta\partial r}(r,\theta)=\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right)=(-\sin\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)$$
$$+(\cos\theta)\left((-r\sin\theta)\times\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(r\cos\theta)\times\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)$$
$$+(\sin\theta)\left((-r\sin\theta)\times\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)+(r\cos\theta)\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta,r\sin\theta)\right)$$

Premières équations aux dérivées partielles

EXEMPLE 11 Déterminer les fonctions réelles (définies sur $\mathbb{R}^2$ sauf pour Q9 où f définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$) vérifiant :

1) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ 2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x$ 3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2f(x,y)$

4) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}y^2\\2xy+1\end{pmatrix}$ 5) $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}$ 6) $\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2zx+y^2\\2xy+z^2\\2yz+x^2\end{pmatrix}$

7) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$ 8) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=x+y$ 9) $2y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

On cherchera les fonctions de classe C^1 ou de classe C^2 sur le domaine qui sont solutions du problème.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=\varphi(x)\text{ où }\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ est de classe }C^1}$

f doit aussi admettre des dérivées partielles selon x continue ce qui oblige φ à être suffisamment régulière.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=xy+\varphi(x)\text{ où }\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ de classe }C^1}$

3. On identifie une EDL1 $u'=2u$ en la variable x donc $\boxed{f(x,y)=C(y)e^{2x}\text{ où }C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$

4. $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)=\begin{pmatrix}y^2\\2xy+1\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x,y)=xy^2+\varphi(y)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifie $2xy+\varphi'(y)=2xy+1$

Attention ! On ne peut pas traiter séparément les équations : l'information obtenue sur la première équation est réinjectée dans la seconde équation.

$\Leftrightarrow f(x,y)=xy^2+\varphi(y)$ et $\varphi'(y)=1$

$\Leftrightarrow f(x,y)=xy^2+\varphi(y)$ et $\varphi(y)=y+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

(pas de dépendance en x car φ n'est fonction que de y)

$\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=xy^2+y+\lambda\text{ où }\lambda\in\mathbb{R}}$

5. $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x,y)=xy+\varphi(y)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable avec : $\underbrace{x+\varphi'(y)=y}_{\text{IMPOSSIBLE}}$ $\boxed{\text{PAS DE SOLUTION}}$

6. $\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2zx+y^2\\2xy+z^2\\2yz+x^2\end{pmatrix}\Leftrightarrow f(x,y,z)=zx^2+xy^2+\varphi(y,z)$ avec $\begin{pmatrix}2xy+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\\x^2+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2xy+z^2\\2yz+x^2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow f(x,y,z)=zx^2+xy^2+\varphi(y,z)$ et $\varphi(y,z)=yz^2+C(z)$ avec $2yz+C'(z)=2yz\Leftrightarrow C'(z)=K\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\boxed{f(x,y,z)=zx^2+xy^2+yz^2+K\text{ où }K\in\mathbb{R}}$

7. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\varphi(y)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1 $\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=\Phi(y)+\Psi(x)\text{ où }\Phi,\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ sont }C^2}$

Φ est une primitive de φ : elle existe car φ est continue et Φ est de classe C^2 puisque φ est C^1

8. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=x+y\Leftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{x^2}{2}+yx+\varphi(y)$ où $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est de classe C^1

$\Leftrightarrow\boxed{f(x,y)=\dfrac{x^3}{6}+y\dfrac{x^2}{2}+\varphi(y)x+\Psi(y)\text{ où }\varphi,\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\text{ sont de classe }C^2}$

9. Si $h=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ alors $\quad 2y\dfrac{\partial h}{\partial y}-h(x,y)=0\Leftrightarrow\dfrac{\partial h}{\partial y}-\dfrac{1}{2y}h(x,y)=0$

C'est une EDL1 homogène aussi : $h(x,y)=C(x)e^{\frac{1}{2}\ln y}=\sqrt{y}C(x)$ où $C:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^1

Aussi : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sqrt{y}C(x)$ où $C:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $C^1\Leftrightarrow f(x,y)=\sqrt{y}\big(\Gamma(x)+\lambda\big)$ où $\Gamma:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe C^2

Γ est une primitive de C : elle existe car C est continue et Γ est de classe C^2 puisque C est C^1