EXERCICE N° 2 Établir la convergence et donner la valeur des intégrales

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{K} = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

• Pour I : $f = \left[x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\right]$ est continue sur $[0,1[$ puisque $1-x^2 \geqslant 0$ et $1-x^2 \neq 0$. Il y a une singularité en 1.

Or : $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \sim_{x\to1} \dfrac{1}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac12}}$ or $\left[x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2}(1-x)^{\frac12}}\right]$ est une fonction de Riemann intégrable en 1 car $\alpha = \dfrac12 < 1$ aussi, par le critère d'équivalence, f est bien intégrable en 1 et donc $\boxed{\text{l'intégrale I est convergente.}}$

Pour le calcule, on pose $t = 1-x^2 = \varphi(x)$ alors φ est C^1 sur $[0,1[$, strictement décroissante donc bijective de $[0,1[$ dans $]0,1]$.

Le changement de variable est possible : $\mathrm{d}t = -2x\mathrm{d}x \quad x\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix} \quad t\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$

Puisque l'intégrale de départ est convergente, celles après changement de variable est aussi convergente et :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^2}{-2\sqrt{1-x^2}} \times -2x\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{1-t}{-2\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac12\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$$

On peut calculer cette nouvelle intégrale puisqu'on identifie une primitives : $\mathrm{I} = \dfrac12\left[2\sqrt{t} - \dfrac{t^{\frac32}}{\frac32}\right]_0^1 = \dfrac12\left(2 - \dfrac23 - 0\right) \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{I} = \dfrac23}$

• Pour J : La fonction $f = \left[t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}\right]$ est continue sur $[0,1[$ où $1-t>0$ et $(1+t)^2 \neq 0$

Il y a une singularité à étudier en 1 mais : $f(t) \sim_1 \dfrac14 \ln(1-t)$ qui est <0 sur $[0,1[$

Par critère d'équivalence, J a la même nature que $\dfrac14\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\mathrm{d}t$. Cette intégrale est convergente car elle se ramène par un changement de variable $u = 1-t$ à l'intégrale de référence $\dfrac14\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\mathrm{d}u$ absolument convergente. Aussi : $\boxed{\text{J est convergente}}$

On réalise une intégration par parties avec : $\begin{vmatrix} u(t) = \ln(1-t) \\ v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}\end{vmatrix}$ soit $\begin{vmatrix} u'(t) = -\dfrac{1}{1-t} \\ v(t) = -\dfrac{1}{1+t}\end{vmatrix}$ où u et v sont C^1 sur $[0,1[$

On commence par étudier la convergence de la partie intégrée : $\Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 = \left[-\dfrac{\ln(1-t)}{1+t}\right]_0^1 = \lim\limits_{t\to1}\left(-\dfrac{\ln(1-t)}{1+t}\right) + 0 = +\infty$

Le théorème d'intégration par parties sur les intégrales généralisées ne s'appliquent pas mais on peut travailler sur un segment.

On revient à une IPP sur un segment à l'aide de la définition $\mathrm{J} = \lim\limits_{a\to1^-}\mathrm{J}(a)$ où $\mathrm{J}(a) = \displaystyle\int_0^a u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ avec

$$\mathrm{J}(a) = \int_0^a u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^a - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)(1+t)} = -\frac{\ln(1-a)}{1+a} - \frac12\int_0^a\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t \quad \text{soit :}$$

(décomposition en éléments simples)

$$\mathrm{J}(a) = -\frac{\ln(1-a)}{1+a} - \frac12[-\ln(1-t)+\ln(1+t)]_0^a = -\frac{\ln(1-a)}{1+a} + \frac{\ln(1-a)}{2} - \frac{\ln(1+a)}{2} = \frac{-(1-a)\ln(1-a)}{2(1+a)} - \frac{\ln(1+a)}{2} \xrightarrow[a\to1]{} \boxed{-\frac{\ln 2}{2} = \mathrm{J}}$$

• Pour K : la fonction $[x \mapsto e^{-\sqrt{x}}]$ est continue sur $[0,+\infty[$ par composition de fonctions usuelles puisque $x \geqslant 0$.

On pose $t = \sqrt{x} = \varphi(x)$ alors φ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, strictement croissante donc bijective de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ aussi le changement de variable est possible : $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2 \quad \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t \quad x\begin{vmatrix}+\infty\\0\end{vmatrix} \quad t\begin{vmatrix}+\infty\\0\end{vmatrix}$

L'intégrale K a la même nature que $\mathrm{K}_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\times 2t\mathrm{d}t$ et, si elle converge, $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1$

On réalise une IPP sur K_1 avec : $\begin{vmatrix} u(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-t}\end{vmatrix}$ soit $\begin{vmatrix} u'(t) = 2 \\ v(t) = -e^{-t}\end{vmatrix}$ où u et v sont C^1 sur $[0,+\infty[$

1) $\Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-2te^{-t}\right) + 0 = 0$ par croissance comparée.

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -2e^{-t}\mathrm{d}t = -2\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente (intégrale de référence)

L'IPP est possible (car 2 termes sur 3 convergent) donc K_1 est convergente et, par changement de variable, $\boxed{\text{K est convergente}}$.

De plus : $\mathrm{K} = \mathrm{K}_1 = 0 + 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 2\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 0+2$ soit $\boxed{\mathrm{K} = 2}$

EXERCICE N° 4 On considère l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\operatorname{Arctan} x - \pi}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x$

1. Justifier la convergence de I.

On introduit f avec $f(x) = \dfrac{2\operatorname{Arctan} x - \pi}{2\sqrt{x}}$. Par les théorèmes usuels, f est C^0 sur $]0,+\infty[$ puisque $x \geqslant 0$ et $\sqrt{x} \neq 0$ si $x > 0$.
On étudie séparément les deux singularité en 0 et en $+\infty$.
<u>En 0</u> : On cherche un équivalent (possiblement pour prolonger par continuité) :
$$2\operatorname{Arctan} x - \pi \xrightarrow[x\to 0]{} -\pi \Rightarrow 2\operatorname{Arctan} x - \pi \sim_0 -\pi \quad \text{OU BIEN} \quad 2\operatorname{Arctan} x - \pi = 2(x + o(x)) - \pi = -\pi + 2x + o(x) \sim_0 -\pi$$
Aussi : $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{-\pi}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ où on reconnaît une fonction de Riemann qui est intégrable en 0 puisque $\alpha = \frac{1}{2} < 1$
Par critère d'équivalence, on peut affirmer que f est intégrable en 0
<u>En $+\infty$</u> : On ne peut pas exploiter d'équivalent/DL sauf à ramener le problème à l'infini au voisinage de 0 or on sait que
$\operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ soit $2\operatorname{Arctan} x - \pi = -2\operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} \sim_{+\infty} -\dfrac{2}{x}$ car $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Arctan} u \sim_0 u \\ u = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{array}\right.$
Aussi : $f(x) \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{x\sqrt{x}} = \dfrac{-1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et on reconnaît une intégrale de Riemann intégrable en $+\infty$ car $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$
Par critère d'équivalence, on peut affirmer que f est intégrable en $+\infty$
<u>Finalement</u> : $\mathrm{I} = \underbrace{\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}_{=\mathrm{I}_1 \text{ qui CVA}} + \underbrace{\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t}_{=\mathrm{I}_2 \text{ qui CVA}}$ donc, par somme d'intégrale convergente, $\boxed{\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \text{ converge}}$.

2. Prouver que : $\mathrm{I} = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$\dfrac{2}{1+x^2}$ est une dérivée de $2\operatorname{Arctan} x - \pi$ et de $\sqrt{x}$ une primitive du $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ aussi il est naturel de penser à une intégration par parties (IPP)

On réalise une IPP avec $\left|\begin{array}{l} u(x) = 2\operatorname{Arctan} x - \pi \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right.$ soit $\left|\begin{array}{l} u'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} \\ v(x) = \sqrt{x} \end{array}\right.$ où u et v sont C^1 sur $]0,+\infty[$.

Sous réserve que c'est possible, on a : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Ici : $\Big[u(x)v(x)\Big]_0^{+\infty} = \Big[\sqrt{x}\big(2\operatorname{Arctan} x - \pi\big)\Big]_0^{+\infty} = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\big(2\operatorname{Arctan} x - \pi\big) = \lim_{x\to+\infty} -2\sqrt{x}\operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

puisque $-2\sqrt{x}\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} \sim_{+\infty} -2\sqrt{x} \times \dfrac{1}{x} \sim_{+\infty} -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

L'IPP est possible et on sait que les deux intégrales sont de même nature à savoir convergente vu la question 1 et on a :
$$\mathrm{I} = 0 - \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{I} = -\int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x}$$

3. Calculer alors I à l'aide d'un changement de variables sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

On pose $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = t^2$ dans cette nouvelle intégrale : $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ $\quad x \left|\begin{array}{l} +\infty \\ 0 \end{array}\right. \quad t \left|\begin{array}{l} +\infty \\ 0 \end{array}\right.$
$[t \mapsto t^2]$ réalise une bijection de classe C^1, strictement croissante, de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ aussi le changement de variable est possible.
$$\mathrm{I} = -\int_0^{+\infty} \frac{2t}{1+t^4} \times 2t\mathrm{d}u = -4\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}u = -4 \times \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \boxed{-\pi\sqrt{2} = \mathrm{I}}$$
<u>Remarque</u> : Puisque $\operatorname{Arctan} x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $f(x) \leqslant 0$ et donc il est cohérent de trouver un résultat négatif.

EXERCICE N° 5

1. La fonction $\left[f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}(t)}\right]$ est-elle intégrable sur $I =]0, +\infty[$?

f est continue sur $]0, +\infty[$ par quotient puisque $\mathrm{ch}\, t \neq 0$ et $t \geqslant 0$ avec $\sqrt{t} \neq 0$ si $t > 0$
On étudie séparément les deux singularités.
En 0 : $f(t) \sim_0 \dfrac{1}{(\sqrt{t}) \times 1} = \dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}} > 0$ ou on reconnaît une fonction de Riemann intégrable en 0 puisque $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$
Par critère d'équivalence, on peut affirmer que $\boxed{f \text{ est intégrable au voisinage de } 0}$
En $+\infty$: On ne contrôle pas le signe de $f(t)$ à cause du $\cos t$ en $+\infty$ aussi on étudie la convergence absolue :

$$|f(t)| = \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}(t)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}\,\mathrm{ch}(t)} = \varphi(t)$$

Étudions l'intégrabilité de φ en $+\infty$: $\varphi(t) \sim_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t} \times \frac{e^t}{2}} = \dfrac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}$ Rappel : $\mathrm{ch}\, t \sim_{+\infty} \dfrac{e^t}{2}$

On n'identifie pas une fonction de référence mais on repère une expression qui converge vers 0 en $+\infty$ plus rapidement que la fonction $[t \mapsto e^{-t}]$ qu'on sait intégrable en $+\infty$. On peut s'appuyer sur une règle du o :

$$\frac{\varphi(t)}{e^{-t}} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc } \varphi(t) = o_{+\infty}\left(e^{-t}\right) \text{ or } [t \mapsto e^{-t}] \text{ est intégrable en } +\infty \text{ donc } \varphi \text{ est intégrable en } +\infty$$

Ainsi, φ est intégrable en $+\infty$ et, par majoration, $\boxed{f \text{ est aussi intégrable en } +\infty}$
Finalement :

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t}_{=I_1 \text{ qui CVA}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t}_{=I_2 \text{ qui CVA}} \quad \text{donc } \boxed{f \text{ est bien intégrable sur }]0, +\infty[} \text{ puisque } \int_0^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge}$$

2. (a) Pour m un nombre réel, la fonction $\left[\varphi : t \mapsto e^{-t^2 + imt}\right]$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

C'est une fonction à valeurs complexes donc, pour établir la continuité, on regarde les parties réelles et imaginaires
φ est une fonction à valeurs complexes et : $\varphi(t) = e^{-t^2} e^{imt} = \underbrace{e^{-t^2}\cos(mt)}_{=\Re e(\varphi)(t)} + i\,\underbrace{e^{-t^2}\sin(mt)}_{=\Im m(\varphi)(t)}$
Ainsi, φ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque ses parties réelles $\Re e(\varphi)$ et imaginaires $\Im m(\varphi)$ sont continues sur $\mathbb{R}$
On étudie l'intégrabilité or : $|\varphi(t)| = \left|e^{-t^2} e^{imt}\right| = e^{-t^2} \times 1$
On reconnaît la fonction bien connue $[t \mapsto e^{-t^2}]$ qu'on sait intégrable en $+\infty$ (voir plusieurs preuves dans le cours) et, par parité, elle est aussi intégrable en $-\infty$.
Ainsi : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge donc $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$

(b) Que peut-on en déduire pour les intégrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\cos(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\sin(t)\mathrm{d}t$?

Par suite, pour tout m réel, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+imt}\mathrm{d}t$ est toujours convergente. Comme elle est à valeurs complexes, cela signifie que sa partie réelle et sa partie imaginaire sont aussi des intégrales convergentes.
Pour $m = 1$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+it}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{it}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(t)\mathrm{d}t + i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sin(t)\mathrm{d}t$
Ainsi, on peut conclure que $\boxed{\text{les deux intégrales sont convergentes}}$