PT : Correction du TD n° 2 sur le chapitre VI

EXERCICE N° 2 Soit la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le rang de $G - I_3$.
En déduire le spectre de G et le polynôme caractéristique de G sans aucun calcul de déterminant

$G - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1 car toutes les colonnes sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\mathrm{rg}(G - I_3) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,(G - I_3) = \dim \mathbb{R}^3 - \mathrm{rg}(G - I_3) = 3 - 1 = 2$ par le théorème du rang
Aussi, $\lambda = 1$ est une valeur propre et $\dim E_\lambda(G) = \dim \mathrm{Ker}\,(G - I_3) = 2$.
Comme G est d'ordre 3, elle a exactement 3 valeurs propres réelles α, β, γ et on peut imposer $\alpha = \beta = 1$ puisque la multiplicité $m(1)$ de la valeur propre 1 vérifie $m(1) \geqslant \dim E_1(G)$
Il reste donc une valeur propre γ à déterminer et on peut utiliser la trace : $\mathrm{Tr}(G) = 1 + 1 + \gamma = 1 + 3 - 3 \Rightarrow \gamma = -1$
Ainsi : $\mathrm{Sp}(G) = \{1, -1\}$ avec $\begin{cases} m(1) = 2 \\ m(-1) = -1 \end{cases}$ d'où $\chi_G(x) = (x-1)^2(x+1)$ (unitaire de degré 3 avec 1 pour racine double et -1 pour racine simple

2. Calculer $G\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. En déduire une base de chacun des sous-espace propre de G

• $G\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\varepsilon_1 = (0, -1, 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre -1 or $\dim E_{-1}(G) = \dim \mathrm{Ker}\,(G + I_3) \geqslant 1$ donc (ε_1) est une base de $E_{-1}(G)$
• On remarque que : $(G - I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (G - I_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (en utilisant les relations trouvées sur les colonnes de $G - I_3$)
Or : $\vec{\varepsilon}_2 = (1, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = (2, 0, 1)$ sont non colinéaires et sont dans $E_1(G) = \mathrm{Ker}\,(G - I_3)$ qui est de dimension 2 aussi $(\varepsilon_2, \varepsilon 3)$ est une base de $E_1(G) = \mathrm{Ker}\,(G - I_3)$

3. La matrice G est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

• Pour prouver que G est diagonalisable, deux possibilités :
soit on utilise la caractérisation $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(G)} \dim E_\alpha(G) = n$ vérifiée ici car : $\dim E_1(G) + \dim_{-1}(G) = 2 + 1 = 3$
soit on utilise χ_G est scindé et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(G)$, $\dim E_\lambda(G) = m(\lambda)$
• On construit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}GP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$

EXERCICE N° 3 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $A^2 = -I_n$

1. Si λ est une valeur propre complexe de A, établir que $\lambda^2 + 1 = 0$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$
$A^2X = A(AX) = \lambda AX = \lambda^2 X$ d'une part et $A^2X = -I_nX = -X$ d'autre part.
Aussi: $\lambda^2 X = -X \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)X = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$ car $X \neq 0$

2. Démontrer alors que: n est pair, $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 1$

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ alors $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$ aussi: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{-i, i\}$
Attention, c'est seulement une inclusion car raisonnement en « Si … alors »
Comme A est d'ordre $n \geqslant 1$, alors son polynôme caractéristique χ_A de degré n possède au moins une racine complexe (à cause du théorème de d'Alembert-Gauss) donc i ou $-i$ est forcément une racine de χ_A
Mais, puisque A est une matrice à coefficients réels, $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ et donc i et $-i$ sont forcément des racines avec même multiplicité (les racines complexes sont 2 à 2 conjuguées)
Notons p cette multiplicité, on a: $2p = \deg \chi_A = n \Rightarrow n = 2p$ et donc n est pair.
De plus, la trace est la somme des valeurs propres complexes et le déterminant est le produit des valeurs propres complexes donc: $\mathrm{tr}(A) = p \times i + p \times (-i) = 0$ et $\det(A) = i^p \times (-i)^p = (-i^2)^p = 1^p = 1$

EXERCICE Nº 4 Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i+j = n+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Déterminer A et A^2

$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{A^2 = I_n}$ (A agit sur A par post-multiplication : la colonne j de A^2 est la colonne $n+1-j$ de A

2. En déduire les valeurs propres de A sans aucun calcul de déterminant.

Méthode nº 1 (nettement la plus rapide)

Puisque $A^2 = I_n$, A est la matrice d'une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ donc, d'après le cours, on sait que :

$\mathbb{R}^n = \text{Ker}\,(A - I_n) \oplus \text{Ker}\,(A + I_n) = E_1(A) \oplus E_{-1}(A)$ donc A est diagonalisable et $\text{sp}(A) = \{-1, 1\}$

Méthode nº 2 (si on ne repère pas la symétrie)

Si λ est valeur propre de A associé au vecteur propre X alors $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$

Mais alors : $A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$ d'une part,et, d'autre part : $A^2X = I_nX = X$

aussi : $\lambda^2 X = X \Leftrightarrow (1 - \lambda^2)X = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$ car $X \neq 0$ de sorte que : $\text{sp}(A) \subset \{-1, 1\}$

Les colonnes 1 et n de la matrice $A + I_n$ sont identiques donc $\text{rg}(A + I_n) \leqslant n - 1 \Rightarrow \dim \text{Ker}\,(A + I_n) = n - \text{rg}(A + I_n) \geqslant 1$ avec le théorème de rang. De ce fait, $\dim \text{Ker}\,(A + I) \neq 0 \Rightarrow -1 \in \text{Sp}(A)$. De même, les colonnes 1 et n de la matrice $A - I_n$ sont opposées : $\text{rg}(A - I_n) \leqslant n - 1 \Rightarrow \dim \text{Ker}\,(A - I_n) \geqslant 1 \Rightarrow 1 \in \text{Sp}(A)$. Finalement, $\boxed{\text{sp}(A) = \{-1, 1\}}$

3. Déterminer le polynôme caractéristique de A sans aucun calcul de déterminant.

Notons p et q les multiplicités respectives de 1 et -1 comme racine de χ_A le polynôme caractéristique de A :

$\chi_A(x) = (x-1)^p(x+1)^q$ avec $p + q = n$ puisque χ_A est un polynôme unitaire de degré n admettant pour racine les réels 1 et -1.

On a aussi $p - q = p \times 1 + q \times (-1) = \text{tr}(A)$ On distingue alors deux situations :

• Si $n = 2k$ est pair alors $\text{tr}(A) = 0$ et on a alors $p = q = k$ soit $\boxed{\chi_A(x) = (x-1)^k(x+1)^k \text{ avec } n = 2k}$

• Si $n = 2k+1$ est impair alors $\text{tr}(A) = 1$ et on a alors $q = k$ et $p = k+1$ soit $\boxed{\chi_A(x) = (x+1)^k(x-1)^{k+1} \text{ avec } n = 2k+1}$

4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Méthode nº 1 : (si on a repéré la symétrie)

On sait qu'une symétrie est diagonalisation donc A est diagonalisable.

Méthode nº 2 : (on n'a pas repéré la symétrie mais on repère toutefois une matrice symétrique réelle)

A est une matrice symétrique réelle donc A est diagonalisable.

Méthode nº 3 :(nettement plus longue en revenant à la CNS)

• Si $n = 2k$, les matrices $A + I_n$ et $A - I_n$ sont telles que les colonnes $j \in [\![1, k]\!]$ et $n + 1 - j$ sont égales pour $A + I_n$ et opposés pour $A - I$. De plus,les k premières colonnes sont linéairement indépendantes(immédiat si on écrit la définition). Ainsi : $\text{rg}(A + I_n) = \text{rg}(A - I_n) = k \Leftrightarrow \dim \text{Ker}\,(A + I_n) = \dim \text{Ker}\,(A - I_n) = k$ avec le théorème du rang

Ainsi : $\begin{cases} \chi_A(x) = (x-1)^k(x+1)^k \\ \dim \text{Ker}\,(A + I_n) = \dim \text{Ker}\,(A - I_n) = k \end{cases} \Rightarrow$ A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

• Si $n = 2k+1$, les matrices $A + I_n$ et $A - I_n$ sont telles que les colonnes $j \in [\![1, k]\!]$ et $n + 1 - j$ sont égales pour $A + I_n$ et opposés pour $A - I_n$. De plus,les k premières colonnes sont clairement linéairement indépendantes .

La colonne $k + 1$ est nulle pour $A - I_n$ donc $\text{rg}(A - I_n) = k \Leftrightarrow \dim \text{Ker}\,(A - I_n) = n - k = k + 1$.

La colonne $k + 1$ de $A + I_n$ n'est pas nulle et les $k + 1$ premières colonnes sont clairement linéairement indépendantes donc $\text{rg}(A + I_n) = k + 1 \Leftrightarrow \dim \text{Ker}\,(A - I_n) = n - (k + 1) = k$.

Ainsi : $\begin{cases} \chi_A(x) = (x-1)^k(x+1)^{k+1} \\ \dim \text{Ker}\,(A + I_n) = k \\ \dim \text{Ker}\,(A - I_n) = k + 1 \end{cases} \Rightarrow$ A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

Dans tous les cas, $\boxed{\text{la matrice A est diagonalisable}}$