Correction du TD nº 2 sur le chapitre V : Compléments sur les équations différentielles

EXERCICE Nº 3 Résoudre l'équation (E) : $\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ 2\cos(2x) & \sin(2x) & \sin^2 x \\ -\cos x & -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0$ là où elle est résolue en y''

En développant le déterminant selon la ligne 1, l'équation peut s'écrire sous la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$
(E) est donc une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. On cherche là où elle est résolue:
$a(x) = \sin(2x)\cos x + \sin^3 x = (\sin x)(2\cos^2 x + \sin^2 x) = (\sin x)\underbrace{(1+\cos^2 x)}_{>0}$ aussi $a(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

On résout sur les intervalles $\mathrm{I}_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Sur I_k: la théorie s'applique puisque a, b, c sont clairements C^0 sur $\mathbb{R}$ et $a(x) \neq 0$ sur I_k
L'ensemble des solutions $\mathscr{S}_k$ est un sev de dimension 2: $\mathscr{S}_k = \mathrm{Vect}(h_1; h_2)$ où h_1 et h_2 sont des solutions homogènes non colinéaires.(Pas besoin de solutions particulières puisque c'est une équation homogène)
On remarque que:
$y_1 = [x \mapsto \cos x]$ est une solution (lignes 1 et 3 du déterminant identiques) mais aussi que $y_2 = [x \mapsto \sin^2 x]$ est une solution (car $y_2'(x) = 2\sin x\cos x = \sin(2x)$ et $y_2''(x) = 2\cos(2x)$ donc lignes 1 et 2 du déterminant identique)
La famille (y_1, y_2) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathrm{I}_k}$ (l'une a une limite nulle en $k\pi$ et pas l'autre) aussi $\boxed{\mathscr{S}_k = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)}$ dans $\mathbb{R}^{\mathrm{I}_k}$
Autrement dit: $\forall k \in \mathbb{Z}, \exists (a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]k\pi, (k+1)\pi[,\ y(x) = a_k(\cos x) + b_k(\sin^2 x)$

Les solutions y_1 et y_2 sont des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation et donc $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ est un ensemble de solution sur $\mathbb{R}$.
Pour ces solutions, il y a des constantes a et b telles que: $\forall k \in \mathbb{Z},\ a_k = a$ et $b_k = b$
Mais, pour avoir une solution sur $\mathbb{R}$, est-il obligatoire que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ soient constantes ?
Pour le savoir, étudions le recollement aux réels de type $k\pi$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$.
Recollement en $k\pi$: Si y est une solution sur $](k-1)\pi, (k+1)\pi[$ alors
$\exists (a_{k-1}, b_{k-1}, a_k, b_k) \in \mathbb{R}^4$ avec $y(x) = \begin{cases} a_{k-1}(\cos x) + b_{k-1}(\sin^2 x) & \text{si } x < k\pi \\ a_k(\cos x) + b_k(\sin^2 x) & \text{si } x > k\pi \end{cases}$ et y deux fois dérivable en $k\pi$
La continuité impose: $a_{k-1} \times (-1)^k + 0 = a_k \times (-1)^k + 0 \Leftrightarrow a_{k-1} = a_k$.
Celle de y' en $k\pi$ avec $y'(x) = \begin{cases} -a_k(\sin x) + b_{k-1}\sin(2x) & \text{si } x < k\pi \\ -a_k(\sin x) + b_k \sin(2x) & \text{si } x > k\pi \end{cases}$ est assurée.
De plus, y' doit être dérivable en $k\pi$ donc doit admettre un DL_1: or avec $a = a_{k-1} = a_k$ et b l'un des réel b_k ou b_{k-1}
$y'(k\pi + h) = -a\sin(k\pi + h) + b\sin(2k\pi + 2h) = -(-1)^k a \sin h + b\sin(2h)$
$= (-1)^{k+1} a\big(h + o(h)\big) + b\big(2h + o(h)\big) = \big((-1)^{k+1}a + 2b\big)h + o(h)$
L'existence du DL_1 entraîne: $(-1)^{k+1}a + 2b_k = (-1)^{k+1}a + 2b_{k-1} \Leftrightarrow b_k = b_{k-1}$
Finalement, on a obtenue que $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des suites constantes pour assurer les recollement en $k\pi$
l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est $\mathrm{Vect}(y_1, y_2) = \{[x \mapsto a(\cos x) + b(\sin^2 x)] \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

EXERCICE Nº 4 On considère l'équation (E) : $t^2y'' - ty' + y = 1 - \ln(t)$ à résoudre sur $]0, +\infty[$.

1. Déterminer une solution de l'équation homogène sous la forme $[t \mapsto t^\alpha]$ où α est un réel à déterminer.

Sur $]0, +\infty[$, $u = [t \mapsto t^\alpha]$ est une fonction dérivable (Rappel : si α est réel, $t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$) avec :
$$u'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \text{ et } u''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$$
$t^2u''(t) - tu'(t) + u(t) = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)t^\alpha - \alpha t^\alpha + t^\alpha = 0 \Leftrightarrow \big(\alpha(\alpha-1) - \alpha + 1\big)\underbrace{t^\alpha}_{\neq 0} \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$

2. En déduire la solution générale de cette équation (E).

• Abaissement de l'ordre par la méthode de Lagrange
On connaît une solution homogène h où $h(t) = t$ qui ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. On peut rechercher toutes les solutions de (E) à l'aide de la méthode de Lagrange sous la forme $y(t) = z(t)h(t)$ avec z deux fois dérivables inconnues : $y = z \times h$, $y' = z' \times h + z \times h'$ et $y'' = z'' \times h + 2z' \times h' + z \times h''$
$t^2y'' - ty' + y = 1 - \ln t \Leftrightarrow t^2(z''h + 2z'h' + zh'') - t(z'h + zh') + zh = 1 - \ln t$
$\Leftrightarrow t^2(z''h + 2z'h') - tz'h + z \times \underbrace{(t^2h'' - th' + h)}_{=0} = 1 - \ln t$
$\Leftrightarrow t^2 \times t \times z'' + (2t^2 \times 1 - t \times t)z' = 1 - \ln t$ puisque $h(t) = t$
$\Leftrightarrow t^3\mathrm{Y}' + t^2\mathrm{Y} = 1 - \ln t$ avec $\mathrm{Y} = z'$

• Résolution de l'équation d'ordre 1
• On résout (E′) : $t^3\mathrm{Y}' + t^2\mathrm{Y} = 1 - \ln t$ sur $]0, +\infty[$: (E′) $\Leftrightarrow \mathrm{Y}' + \frac{1}{t}\mathrm{Y} = \frac{1 - \ln t}{t^3}$
Solutions homogènes : $a(t) = \frac{1}{t}$ de primitive $\mathrm{A}(t) = \ln t$ sur $]0, +\infty[$.
L'ensemble des solutions homogènes est Vect(H) où $\mathrm{H}(t) = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}$
Solution particulière : On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante : $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{C}(t)\mathrm{H}(t)$
$\mathrm{Y}' + \frac{1}{t}\mathrm{Y} = \frac{1 - \ln t}{t^3} \Leftrightarrow \mathrm{C}'(t)\mathrm{H}(t) + \mathrm{C}(t) \times \underbrace{\left(\mathrm{H}'(t) + \frac{1}{t}\mathrm{H}(t)\right)}_{=0} = \frac{1 - \ln t}{t^3} \Leftrightarrow \mathrm{C}'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} = \frac{1}{t} \times \ln'(t) + \left(\frac{1}{t}\right)' \ln t = \left(\frac{1}{t} \times \ln t\right)'$
Il suffit de prendre $\mathrm{C}(t) = \frac{\ln t}{t}$ et alors $\mathrm{Y}(t) = \frac{\ln t}{t^2}$
Solutions générales : L'expression de la solution générale est $\mathrm{Y}(t) = \frac{\ln t}{t^2} + \frac{\mathrm{C}}{t}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$
• Résolution de l'équation d'ordre 2
Dès lors : $t^2y'' - ty' + y = 1 - \ln t \Leftrightarrow y = z \times h$ avec $z(x) = \int^x \left(\frac{\ln t}{t^2} + \frac{\mathrm{C}}{t}\right) dt$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$
En utilisant une IPP avec $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} \\ v(t) = \ln t \end{cases}$ soit $\begin{cases} u(t) = -\frac{1}{t} \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$:
$z(x) = -\frac{\ln x}{x} - \int^x \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt + \mathrm{C}\ln x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \mathrm{C}\ln x + \mathrm{K}$ où $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$
Finalement : $t^2y'' - ty' + y = 1 - \ln t \Leftrightarrow \boxed{y(t) = -\ln t - 1 + \mathrm{C}t\ln t + \mathrm{K}t \quad \text{où } (\mathrm{C}, \mathrm{K}) \in \mathbb{R}^2}$

3. Déterminer l'unique solution f de (E) telle que $f(1) = f'(1) = 0$

On précise les constantes à l'aide des conditions initiales :
$f(t) = -\ln t - 1 + \mathrm{C}t\ln t + \mathrm{K}t$ (et $f'(t) = -\frac{1}{t} + \mathrm{C}(\ln t + 1) + \mathrm{K}$) où les réels C et K vérifient
$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \mathrm{K} = 0 \\ -1 + \mathrm{C} + \mathrm{K} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{K} = 1 \text{ et } \mathrm{C} = 0$ soit $\boxed{f(t) = t - \ln t - 1}$