EXERCICE N° 4 Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où:

1) $u_0 = 0$ et $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ sinon 2) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!3^n}$ et $u_0 = 0$ puis $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3^k}{k!3^n}$ et $u_0 = 0$

1) Existence de la somme: $\ln(1+x) \sim_0 x$ et $x = -\frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $u_n \sim_0 -\frac{1}{(n+1)^2} \sim_0 -\frac{1}{n^2}$

Ainsi: $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (la série ne diverge pas grossièrement) et, à partir d'un certain rang, $u_n < 0$.

De plus: $\left\{\begin{array}{l} u_n \sim_0 -\frac{1}{n^2} \\ \sum\left(-\frac{1}{n^2}\right) \text{ converge absolument (Riemann avec } \alpha = 2 > 1) \end{array}\right.$ $\Rightarrow \sum u_n$ converge absolument et donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ existe}}$

Autre rédaction possible avec le critère d'équivalence de PTSI:

$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim_0 -\frac{1}{n^2} \\ -\frac{1}{n^2} < 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \sum u_n$ et $\sum\left(-\frac{1}{n^2}\right)$ ont la même nature or $\sum\left(-\frac{1}{n^2}\right) = -\sum\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Attention ! Lorsque $u_n \sim v_n$, écrire « $\sum u_n \sim \sum v_n$ » n'a pas de sens...et cela peut être compris comme $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$ (équivalence des sommes partielles) qui est fausse (sinon toutes les séries de termes équivalents auraient la même somme !)

Calcul de la somme: Transformons le terme général à l'aide des propriétés usuelles du logarithme:

$$u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \ln(n) + \ln(n+2) - 2\ln(n+1) = \big(\ln(n) - \ln(n+1)\big) + \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big)$$

On repère alors deux termes télescopique mais **Attention à la rédaction !**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(\ln(n) - \ln(n+1)\big) + \big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big)\Big) \neq \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(\ln(n) - \ln(n+1)\big) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(\ln(n+2) - \ln(n+1)\big)\Big)$$

En effet, les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\big((\ln n - \ln(n+1)\big)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\big((\ln(n+2) - \ln(n+1)\big)\big)$ n'existent pas ! On rappelle qu'une série télescopique $\sum(a_{n+1} - a_n)$ a la même nature que la suite (a_n): ici les suites $\big(\ln(n)\big)$ et $\big(\ln(n+1)\big)$ divergent...

Pour continuer à manipuler les sommes, on passe alors avec les sommes partielles: en travaillant avec des sommes finies, on dispose de plus de liberté de calculs.

Calculons la somme partielle:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\ln(k) - \ln(k+1)\big) + \big(\ln(k+2) - \ln(k+1)\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k) - \ln(k+1)\big) + \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(k+2) - \ln(k+1)\big)$$

En utilisant le résultat sur les sommes télescopique: (Merci Marjorie !)

$$S_n = \ln(1) - \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(2) = -\ln 2 + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln 2 \text{ car } \frac{n+2}{n+1} \sim \frac{n}{n} \sim 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \text{ d'où } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2}$$

2) Le terme général étant lui-même une somme, on cherche à écrire u_n comme un produit de Cauchy

On cherche des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ telles que u_n soit le terme général du produit de Cauchy i.e. $u_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

soit: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!3^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{1}{3^{n-k}} = a_0 b_n + \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$ aussi on pose: $a_k = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{k!} \text{ si } k \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } k = 0 \end{array}\right.$ et $b_k = \frac{1}{3^k}$

Attention ! La somme dans u_n commence à 1 et pas à 0 donc il faut donc « ruser » en jouant sur le terme a_0...

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!}$ converge absolument avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^1 - 1$ d'une part.

La série $\sum_{n\geqslant 0} b_n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{3^n}$ converge absolument avec $\sum_{n=0}^{+\infty} b_k = \frac{1-0}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ d'autre part.

Alors la série $\sum u_n$ converge absolument donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ existe}}$ et: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n\right) \Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}(e-1)}$

2 bis) De même, si $u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3^k}{k!3^n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\times\frac{1}{3^{n-k}}=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}+a_nb_0$ aussi on pose: $a_k=\frac{1}{k!}$ et $b_k=\begin{cases}\frac{1}{3^k}\text{ si } k\geqslant 1\\ 0 \text{ si } k=0\end{cases}$

Cette fois, la somme dans u_n termine à $n-1$ et pas à n donc il faut donc « ruser » en jouant sur le terme b_0...

La série $\sum_{n\geqslant 0}a_n=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}$ converge absolument avec $\sum_{n=0}^{+\infty}a_k=e^1$ d'une part.

La série $\sum_{n\geqslant 0}b_n=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{3^n}$ converge absolument avec $\sum_{n=0}^{+\infty}b_k=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\times\frac{1-0}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ d'autre part.

Alors la série $\sum u_n$ converge absolument et: $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\left(\sum_{n\geqslant 0}a_n\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}b_n\right)\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\frac{e}{2} \text{ si } u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3^k}{k!3^n}}$

EXERCICE N° 5 L'objectif de l'exercice est de calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n$ où $|x|<1$

1. Justifier l'existence de la somme.

Si $x=0$ la convergence est claire et la somme vaut 0.

Si $x\neq 0$: $nx^n\neq 0$ et $\frac{|(n+1)x^{n+1}|}{|nx^n|}=\frac{(n+1)}{n}|x|\sim 1\times|x|<1$ et, par la règle d'Alembert, $\sum nx^n$ converge (absolument)

Dans les deux cas, $\boxed{\text{la convergence de la série justifie bien l'existence de la somme}}$.

2. Pour $|x|<1$, calculer de deux façons $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^2$. Conclure.

Méthode 1: on utilise la formule donnant la somme d'une série géométrique: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^2=\left(\frac{1}{1-x}\right)^2=\frac{1}{(1-x)^2}$

Méthode 2: on utilise un produit de Cauchy de deux séries qui CVA: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^2=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)$

Le produit de Cauchy des deux séries absolument convergentes $\sum a_n=\sum x^n$ et de $\sum a_n=\sum x^n$ a pour terme général $c_n=\sum_{k=0}^{n}x^kx^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}x^n=x^n\times(n+1)$. D'après le cours sur le produit de Cauchy, on sait que $\sum c_n$ converge absolument et:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^2$$

Conclusion: On a donc obtenu: $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)^2=\frac{1}{(1-x)^2}$. On peut en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n$

Méthode n^o 1: $\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1-1)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}=\frac{1-(1-x)}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}$

(On peut scinder les sommes car on sait au moins que 2 séries sur les 3 convergent.)

Méthode n^o 2: On pose $n=k+1$ dans $\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^{k+1}=x\times\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k=\frac{x}{(1-x)^2}$$

Le terme $n=0$ n'est en fait pas présent dans la somme, ce qui permet que le changement d'indice en k commence à $k=0$ et pas $k=-1$!

3. Pour $|x|<1$ et $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, que vaut $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}x^n$? En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}nx^n$. Conclure.

Cette question propose une autre méthode...qu'on retrouvera lorsqu'on travaillera les séries entières.

Pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$ et $x\in]-1,1[$: $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}x^n=\frac{1-x^{\mathrm{N}+1}}{1-x}$. En dérivant dans chaque membre cette somme finie (possible car $x\in]-1,1[$):

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}x^n\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^{\mathrm{N}+1}}{1-x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}-x^{\mathrm{N}+1}\times\frac{1}{1-x}\right)\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{(\mathrm{N}+1)x^{\mathrm{N}}(1-x)+x^{\mathrm{N}+1}}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}-x^{\mathrm{N}}\times\frac{(\mathrm{N}+1)(1-x)+x}{(1-x)^2}$$

Aussi: $\mathrm{S_N}=\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}nx^n=x\left(\sum_{n=0}^{\mathrm{N}}nx^{n-1}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}-x^{\mathrm{N}+1}\times\frac{(\mathrm{N}+1)(1-x)+x}{(1-x)^2}$ puis, pour x est fixé dans $]-1,1[$ et $\mathrm{N}\to+\infty$:

$\mathrm{S_N}-\frac{x}{(1-x)^2}\sim_{\mathrm{N}\to+\infty}-x^{\mathrm{N}+1}\times\frac{\mathrm{N}(1-x)}{(1-x)^2}\sim-\frac{x}{1-x}\times\underbrace{\mathrm{N}x^{\mathrm{N}}}_{n\to+\infty}{\to 0}\xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{}0$ soit: $\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\left(\mathrm{S_N}-\frac{x}{(1-x)^2}\right)=0\Leftrightarrow\lim_{\mathrm{N}\to+\infty}\mathrm{S_N}=\boxed{\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n}$

car $\mathrm{N}x^{\mathrm{N}}$ est le terme général d'une série convergente (question 1)

Exercice n° 6 Étudier suivant les valeurs du paramètre réel a la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = n^{n^a} - 1$

On passe en écriture exponentielle: $u_n = \exp(n^a \ln n) - 1$ mais $n^a \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } a \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } a < 0 \text{ par croissance comparée} \end{cases}$ d'où

- Si $a \geqslant 0$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et il y a divergence grossière
- Si $a < 0$ alors pas de divergence grossière et l'étude se poursuit.

  On repère un équivalent usuel: $\begin{cases} e^u - 1 \sim_0 u \\ u = n^a \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \sim n^a \ln n = \dfrac{\ln n}{n^{-a}}$ et on retrouve la famille de série étudier dans les exemples 4 en notant $\alpha = -a$.

  Pour $\alpha = -a \neq 1$, on a obtenu la nature de la série en utilisant la règle du o avec un série de Riemann bien choisie:

  - si $a \in [-1, 0[$ alors, puisque $1 + a \geqslant 0$, on a: $n u_n \sim n^{1+a} \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{n} = o(u_n)$

    Or: $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (Riemann avec $\alpha = 1 \leqslant 1$) donc $\sum u_n$ diverge à cause de la règle du o (par contraposée).

  - si $a < -1$ alors on choisit β avec $a < \beta < -1$ par exemple $\beta = \dfrac{a-1}{2}$ pour que: $n^{-\beta} u_n \sim \dfrac{\ln n}{n^{\beta - a}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{-\beta}}\right)$

    et aussi: $\sum \dfrac{1}{n^{-\beta}}$ converge (Riemann avec $-\beta > 1$) donc, par la règle du o, $\sum u_n$ converge

Exercice n° 7 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

On ne peut pas déterminer trivialement le signe ni éliminer la divergence grossière.

$\sqrt{n^2+1} = (n^2+1)^{\frac{1}{2}} = n \times \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = n \times \left(1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ en utilisant $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)$ avec $u = \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors: $u_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$

Cet équivalent permet de justifier qu'il n'y a pas DVG. On repère une série alternée mais l'équivalent ne permet pas d'obtenir l'hypothèse de monotonie nécessaire à l'application du TSA. L'expression de u_n ne permet pas également de l'obtenir.

On précise le DL: $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + o(u^2)$ d'où $\sqrt{n^2+1} = n\left(1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)\right)$

et: $u_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{8n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$

Or: $\sin x = x + o(x^2)$ avec $x = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$u_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ ainsi: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n} + v_n$ où $v_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n}$ converge par application du TSA car $\dfrac{1}{2n}$ tend vers 0 en décroissant

La série $\sum v_n$ converge absolument avec la règle du o. Par somme, $\boxed{\text{la série } \sum u_n \text{ converge.}}$