EXERCICE 1 On considère l'espace vectoriel $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère les sous-ensembles :

— F constitué des fonctions de E nulles sur $]-\infty, 1]$

— G constitué des fonctions de E nulles sur $[0, +\infty[$

— H constitué des fonctions de E nulles en dehors de $]0, 1[$

Démontrer que F, G et H sont des sev de E qui sont en somme directe

Il s'agit de démontrer que :

1) F, G et H sont des sev de E 2) La somme $F + G + H$ (qui n'existe que si 1) réalisée) est directe

Prouvons 1) On revient à la caractérisation classique :

— On a, par définition : F, G et H qui sont inclus dans E.

— la fonction nulle est dans chacun des sev F, G et H donc ces espaces ne sont pas vide.

— Ces sev sont stables par combinaison linéaire. On fait la démonstration pour F (situation analogue pour G et H)

Soient f_1 et f_2 dans F et $\alpha \in \mathbb{R}$, a-t-on $\alpha f_1 + f_2 \in F$?

On sait : f_1 et f_2 sont continues sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x \in]-\infty, 1],\ f_1(x) = 0 = f_2(x)$

On veut : $\alpha f_1 + f_2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in]-\infty, 1],\ (\lambda f_1 + f_2)(x) = 0$

Or, une combinaison linéaire de fonctions continues est continue aussi $\alpha f_1 + f_2$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in]-\infty, 1],\ (\alpha f_1 + f_2)(x) = \alpha f_1(x) + f_2(x) = \alpha 0 + 0 = 0$ donc $\alpha f_1 + f_2 \in F$

Prouvons 2) : Il s'agit d'établir que 0_E admet une unique décomposition dans $F + G + H$ qui est triviale càd :

$$\forall (f, g, h) \in F \times G \times H,\ 0_E = f + g + h \Rightarrow f = g = h = 0_E$$

On sait donc que : $f + g + h = [x \mapsto 0] \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x) + h(x) = 0\ (*)$

f est C^0 sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty, 1]$, g est C^0 sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $[0, +\infty[$, h est C^0 sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

On veut montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) = h(x) = 0$

Pour cela, on utilise $(*)$ en évaluant :

pour $x \geqslant 1$ alors $g(x) = h(x) = 0$ et $(*) \Rightarrow f(x) + 0 + 0 = 0$ aussi f est nulle sur $[1, +\infty[$ et on sait déjà qu'elle est nulle sur $]-\infty, 1]$ aussi $f = 0_E$

Si $x < 0$ alors $f(x) = h(x) = 0$ et $(*) \Rightarrow 0 + g(x) + 0 = 0$ aussi g est nulle sur $]-\infty, 0[$ et on sait déjà qu'elle est nulle sur $[0, +\infty[$ aussi $g = 0_E$

Mais alors $(*)$ devient $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 0$ soit $h = 0_E$

$$\boxed{\text{Ainsi, la somme des sev F, G et H est bien directe}}$$

.

Attention! Le sujet ne demande pas de démontrer $F \oplus G \oplus H = E$!

D'ailleurs, une fonction $f + g + h$ de $F + G + H$ est forcément nulle en 0 aussi on peut trouver des fonctions de E (par exemple la fonction constante à 1) qui ne sont pas dans $F + G + H +$. On a : $F \oplus G \oplus H \subset E$ et l'inclusion est stricte

EXERCICE 2 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le sev $E_\lambda = \text{Ker}\,(f - \lambda id)$ où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$
Prouver que E_λ est un sev de $\mathbb{R}^3$ qui est stable par f

Il s'agit de prouver que E_λ est un sev stable par f autrement dit que :

• E_λ est un sev or c' est le noyau de l'application linéaire $f - \lambda id$ donc c'est un sev de $\mathbb{R}^3$

• E_λ est stable par l'endomorphisme f si : $f(E_\lambda) \subset E_\lambda \Leftrightarrow \forall x \in E_\lambda,\ f(x) \in E_\lambda$

On se donne donc $x \in E_\lambda$ et on vérifie que $f(x) \in E_\lambda$.

On sait : $x \in E_\lambda = \text{Ker}\,(f - \lambda id) \Leftrightarrow f(x) - \lambda x = 0_E \Leftrightarrow f(x) = \lambda x$ On veut : $f(x) \in E_\lambda \Leftrightarrow f\big(f(x)\big) = \lambda f(x)$

On prouve : $f\big(f(x)\big) =_{\text{car } f(x) = \lambda x} f(\lambda x) =_{\text{car } f \text{ est linéaire}} \lambda f(x)$ OU BIEN $f(x) = \underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{x}_{\in E_\lambda} \in E_\lambda$ car E_λ est un sev

2. Déterminer une base des sev E_1, E_0 et E_{-1}

— (Méthode rang) $E_1 = \text{Ker}\,(A - I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

On remarque $C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ où C_i colonne i de $A - I_3$ et C_1 et C_3 non colinéaire donc $\text{rg}(A - I_3) = 2$

Par le théorème du rang : $\dim E_1 = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg}(A - I_3) = 3 - 2 = 1$

donc il nous suffit de trouver un vecteur de Ker $(A - I_3)$ pour avoir une base :

$C_1 + C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{E_1 = \text{Vect}\big((1,1,1)\big) \text{ et } \mathscr{B}_1 = \big((1,1,1)\big) \text{ est une base de } E_1}$

— <u>(Méthode noyau)</u> $E_0 = \text{Ker}\,(A) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z=0 \\ -4x-3y+8z=0 \\ -x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=0 \\ x=2z \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=z(2,0,1)$ donc $\boxed{E_0 = \text{Vect}\big((2,0,1)\big) \text{ et } \mathscr{B}_2 = \big((2,0,1)\big) \text{ est une ba}}$

— <u>(Méthode noyau)</u> $E_{-1} = \text{Ker}\,(A+I_3) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x-y+4z=0 \\ -x+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+z=-2z \\ -6z+2z+4z=0 \\ x=3z \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z)=z(3,-2,1)$

donc $\boxed{E_{-1} = \text{Vect}\big((3,-2,1)\big) \text{ et } \mathscr{B}_3 = \big((3,-2,1)\big) \text{ est une base de } E_{-1}}$

3. Prouver que E_1, E_0 et E_{-1} sont en somme directe

Il s'agit de prouver que $0_E = 0_E + 0_E + 0_E$ est l'unique décomposition de 0_E dans $E_1 + E_0 + E_{-1}$
Autrement dit : si $0_{\mathbb{R}^3} = x_1 + x_0 + x_{-1}$ (1) où $x_i \in E_i$ alors on prouve que : $x_1 = x_0 = x_{-1} = 0_E$
<u>Méthode n° 1</u> (méthode ne nécessitant pas d'avoir réussi la question 2)
<u>On sait</u> : $0_{\mathbb{R}^3} = x_1 + x_0 + x_{-1}$ (1)
et aussi : $x_1 \in E_1 = \text{Ker}\,(f-id) \Leftrightarrow f(x_1) = x_1$ $x_0 \in E_0 = \text{Ker}\, f \Leftrightarrow f(x_0) = 0_E$ et : $x_{-1} \in \text{Ker}\,(f+id) \Leftrightarrow f(x_{-1}) = -x_{-1}$
<u>On veut</u> : $x_1 = x_0 = x_{-1} = 0_E$
<u>On prouve</u> : Ici, on a 3 inconnues $x_1,\ x_0$ et x_{-1} et on dispose d'une équation (1). Pour espérer résoudre, on cherche donc deux autres équations et il s'agit d'exploiter les propriétés de $x_1,\ x_0$ et x_{-1}.
$0_{\mathbb{R}^3} = x_1 + x_0 + x_{-1} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} = f(0_{\mathbb{R}^3}) = f(x_1) + f(x_0) + f(x_{-1}) = x_1 + 0 - x_{-1}$ par linéarité donc : $x_1 - x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3}$ (2)
puis : $x_1 - x_{-1} = 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_{-1}) = f(0_{\mathbb{R}^3}) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow x_1 + x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3}$ (3)

On obtient le système $\begin{cases} x_1 + x_0 + x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ x_1 - x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ x_1 + x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3} \\ x_{-1} = x_1 \\ 2x_1 = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_0 = x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3}$

<u>Méthode 2</u> (méthode nécessitant d'avoir réussi la question 2 contrairement au précédent)
<u>On sait</u> $x_1 \in E_1 = \text{Vect}\big((1,1,1)\big)$ donc $\exists a \in \mathbb{R}, x_1 = a(1,1,1)$
et aussi : $x_0 \in E_0 = \text{Vect}\big((2,0,1)\big)$ donc $\exists b \in \mathbb{R}, x_2 = b(2,0,1)$
et enfin : $x_{-1} \in E_{-1} = \text{Vect}\big((3,-2,1)\big)$ donc $\exists c \in \mathbb{R}, x_{-1} = c(3,-2,1)$
<u>On veut</u> $x_1 = x_0 = x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou encore $a = b = c = 0$

<u>On prouve</u> $x_1 + x_0 + x_{-1} = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow a(1,1,1) + b(2,0,1) + c(3,-2,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ a-2c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a=b=c=0$

4. En déduire que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_0 \oplus E_{-1}$

— Les E_i étant des sev de $\mathbb{R}^3$, on a déjà : $E_1 \oplus E_0 \oplus E_{-1} \subset \mathbb{R}^3$ (i)
— La somme étant directe : $\dim\big(E_1 \oplus E_0 \oplus E_{-1}\big) = \dim E_1 + \dim E_0 + \dim E_{-1} = 1+1+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ (ii)

Or : $\begin{cases} (i) \\ (ii) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{E_1 \oplus E_0 \oplus E_{-1} = \mathbb{R}^3}$

5. Déterminer une base adaptée à cette décomposition et donner la matrice de f dans cette base.

On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1)$, $\varepsilon_2 = (2,0,1)$ et $\varepsilon_3 = (3,-2,1)$ alors $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base adaptée à cette décomposition.

De plus $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = 0 \\ f(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3 \end{cases} \Rightarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ par définition.