TD N° 1 SUR LE CHAPITRE XIV

EXERCICE N° 1 L'espace est rapporté à un repère orthonormée $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$

1. Montrer que la courbe $\Gamma:\begin{cases} x(t)=t^2-1\\ y(t)=2t\\ z(t)=t^2+t+1\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ est plane et préciser une équation cartésienne de son plan Π.

La courbe est plane si elle est incluse dans un plan.
Autrement dit, on cherche un plan Π d'équation $ax+by+cz+d=0$ avec $\begin{cases}(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\\(a,b,c)\neq(0,0,0)\end{cases}$ telle que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ ax(t)+by(t)+cz(t)+d=0 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ (a+c)t^2+(2b+c)t-a+c+d=0 \Leftrightarrow \begin{cases}a+c=0\\2b+c=0\\-a+c+d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-c\\b=-\frac{c}{2}\\d=-2c\end{cases}$$

Puisque $(a,b,c)=(-c,-\frac{c}{2},c)\neq(0,0,0)$, alors $c\neq 0$. Ainsi : $\Pi:\ -cx-\frac{c}{2}y+cz-2c=0 \Leftrightarrow -\frac{c}{2}\left(2x+y-2z+4\right)=0$

$$\boxed{\Gamma \text{ est incluse dans le plan } \quad \Pi: 2x+y-2z+4=0}$$

2. Vérifier que $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthogonal de Π où $\Omega(-1,0,1)$, $\vec{u}=\vec{\imath}+\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+\vec{k}$

On vérifie que :
- $\Omega\in\Pi$ car : $2\times -1+0-2\times 1+4=0$
- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux puisque $\vec{u}.\vec{v}=0$
- $(\vec{u},\vec{v})$ est une base du plan Π puisque $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}-1\\4\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\4\end{vmatrix}=-2\vec{n}$ où $\vec{n}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$ est normal à Π

OU BIEN $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et vérifient $\vec{u}.\vec{n}=0=\vec{v}.\vec{n}$ où $\vec{n}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$ est normal à Π

Finalement, $\boxed{(\Omega;\vec{u},\vec{v}) \text{ est bien un repère orthogonal de } \Pi}$

3. Démontrer alors que Γ est une parabole dont on précisera le sommet et l'axe de symétrie.

On cherche les coordonnées (X,Y) d'un point $M(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ de Γ dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ qui vérifie :

$$\overrightarrow{\Omega M(t)}=X\vec{u}+Y\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x(t)+1\\y(t)\\z(t)-1\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+Y\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2=X-Y\\2t=4Y\\t^2+t=X+Y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=t^2+\frac{t}{2}\\Y=\frac{t}{2}\end{cases}\quad\text{(équation } L_3 \text{ compatible)}$$

OU BIEN $\begin{cases}x(t)-(-1)=t^2\\y(t)=2t\\z(t)-1=t^2+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x(t)-(-1)\\y(t)\\z(t)-1\end{pmatrix}=t^2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{t}{2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}+\frac{t}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M(t)}=\left(t^2+\frac{t}{2}\right)\vec{u}+\frac{t}{2}\vec{v}$

Dans $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$, on dispose d'une représentation paramétrique de Γ permettant d'obtenir une représentation cartésienne :

$$\Gamma:\begin{cases}X=t^2+\frac{t}{2}\\Y=\frac{t}{2}\end{cases},\ t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow X=(2Y)^2+Y$$

Méthode 1 : On remarque Γ a une équation dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ de la forme $X=Y(4Y+1)$
On identifie bien l'équation d'une parabole puisqu'il s'agit d'une équation de la forme $X=f(Y)$ associée à la fonction du second degré $f(x)=x(4x+1)$ ayant pour racine $Y=0$ et $Y=-\frac{1}{4}$

Le sommet est le point de coordonnées $(f(Y_0),Y_0)$ dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ où $Y_0=\dfrac{0+\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}=-\dfrac{1}{8}$. C'est donc le point de paramètre $t_0=2Y_0=-\dfrac{1}{4}$. Ainsi, $\boxed{\text{le sommet S a pour coordonnées } S\left(-\frac{15}{16},-\frac{1}{2},\frac{13}{16}\right)}$ et $\boxed{\text{son axe est } S+\text{Vect}(\vec{u})}$

Méthode 2 : On réduit l'équation de Γ : $X^2=4(Y^2+\frac{1}{4}Y)=4\left((Y+\frac{1}{8})^2-\frac{1}{64}\right)\Leftrightarrow(Y+\frac{1}{8})^2=\dfrac{1}{4}(X+\frac{1}{16})$
On identifie bien l'équation réduite d'une parabole d'une parabole $(Y-Y_0)^2=2p(X-X_0)$
Le sommet S a pour coordonnée $(X,Y)=(-\frac{1}{16},-\frac{1}{8})$ dans $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ et son axe est $S+\text{Vect}(\vec{u})$.
Retrouvons les coordonnées de S dans $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$:

$$\overrightarrow{\Omega S}=-\frac{1}{16}\vec{u}-\frac{1}{8}\vec{v}\Leftrightarrow\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{O\Omega}-\frac{1}{16}\vec{u}-\frac{1}{8}\vec{v}=(-\vec{\imath}+\vec{k})-\frac{1}{16}(\vec{\imath}+\vec{k})-\frac{1}{8}(-\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+\vec{k})=-\frac{15}{16}\vec{\imath}-\frac{1}{2}\vec{\jmath}+\frac{13}{16}\vec{k}$$

EXERCICE N° 2 L'espace est rapporté à un repère euclidien orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la surface $S:\begin{cases} x=u+v\\ y=2v^2+uv\\ z=u\end{cases},(u,v)\in\mathbb{R}^2$

On élimine les paramètres en veillant à conserver des équivalences :

$M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \exists(u,v)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases} x=u+v\\ y=2v^2+uv\\ z=u\end{cases} \underset{u=z;v=x-z}{\Leftrightarrow} y=2(x-z)^2+(x-z)z=2x^2+z^2+3xz$

Attention! Ici, les réciproques sont triviales. S'il l'une des réciproques n'est pas possible, l'implication donnera seulement une équation cartésienne d'une surface S_1 qui contient S

2. Déterminer un paramétrage de la surface $\Sigma:\ 4x^2-y^2+z^2=1$

Il faut penser au lemme classique : « a et b sont réels avec $a^2+b^2=1 \Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R},\begin{cases} a=\cos\theta\\ b=\sin\theta\end{cases}$ »

$\Sigma:\ 4x^2-y^2+z^2=1 \Leftrightarrow_{1+y^2\geqslant 0} \left(\dfrac{2x}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2+\left(\dfrac{z}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2=1 \Leftrightarrow \exists\theta\in\mathbb{R},\begin{cases} 2x=\sqrt{1+y^2}\cos\theta\\ z=\sqrt{1+y^2}\sin\theta\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\exists(u,\theta)\in\mathbb{R}^2,\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{1+u^2}}{2}\cos\theta\\ y=u\\ z=\sqrt{1+u^2}\sin\theta\end{cases}}$

Il est fréquent d'utiliser l'une des variables comme paramètre. Il faut veiller à vérifier les équivalences.

3. Identifier les sections planes de Σ avec des plans normaux aux axes du repère.

Le sujet demande seulement la nature des sections planes aussi il n'est pas utile d'entrer dans le détail des éléments caractéristiques. Toutefois, à titre d'exercice, je donnerai ici les éléments caractéristiques.

Section plane avec un plan normal à (Oy) d'équation $Q_k : y=k$ où $k\in\mathbb{R}$: $\Sigma_{y=k}=\Sigma\cap Q_k:\begin{cases} 4x^2+z^2=1+k^2\\ y=k\end{cases}$

Dans le plan Q_k, $\Sigma_{y=k}$ a pour équation : $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{2}\right)^2}+\dfrac{z^2}{(\sqrt{1+k^2})^2}=1$ puisque $1+k^2>0$ aussi $\Sigma_{y=k}$ est une ellipse

Elle est incluse dans le plan Q_k de centre $I_k(0,k,0)$ d'axes $I_k+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ et $I_k+\mathrm{Vect}(\vec{k})$ et de demi-axe $a=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{2}$ et $b=\sqrt{1+k^2}$

Les centres de ces ellipses sont tous situé sur l'axe (Oy).

Section plane avec un plan normal à (Oz) d'équation $R_k : z=k$ où $k\in\mathbb{R}$: $\Sigma_{z=k}=\Sigma\cap R_k:\begin{cases} 4x^2-y^2=1-k^2\\ z=k\end{cases}$

- si $k\in\{-1,1\}$ alors $\Sigma_{z=k}:\begin{cases} 4x^2-y^2=0\\ z=k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)(2x-y)=0\\ z=k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0\\ z=k\end{cases}$ ou $\begin{cases} 2x+y=0\\ z=k\end{cases}$

C'est la réunion de deux droites (car intersection de deux plans non parallèles)

- sinon $\Sigma_{z=k}$ a pour équation dans R_k : $\dfrac{4x^2}{1-k^2}-\dfrac{y^2}{1-k^2}=1$ et on identifie une hyperbole de centre $J_k(0,0,k)$

Elle est d'axe $J_k+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ et $J_k+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$ et d'asymptotes $J_k+\mathrm{Vect}(\vec{\imath}\pm 2\vec{\jmath})$. La position des sommets dépend du signe de $1-k^2$.

Si $1-k^2>0 \Leftrightarrow k\in]-1,1[$, une équation en $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ donne des sommets à une distance $\dfrac{1}{2}\sqrt{|1-k^2|}$ de J_k sur $J_k+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$.

Si $1-k^2<0 \Leftrightarrow |k|>1$, une équation en $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ donne des sommets à une distance $\sqrt{|1-k^2|}$ de J_k sur $J_k+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$.

Section plane avec un plan normal à (Ox) d'équation $P_k : x=k$ où $k\in\mathbb{R}$: $\Sigma_{x=k}=\Sigma\cap P_k:\begin{cases} z^2-y^2=1-4k^2\\ x=k\end{cases}$

- si $1-4k^2=0 \Leftrightarrow k\in\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$, alors $\Sigma_{x=k}$ est la réunion de deux droites $\begin{cases} x=k\\ z=\pm y\end{cases}$

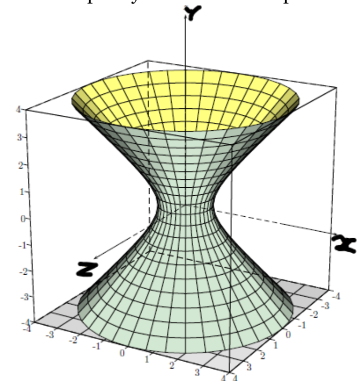
- sinon $\Sigma_{x=k}$ a pour équation dans P_k $\dfrac{z^2}{1-4k^2}-\dfrac{y^2}{1-4k^2}=1$ c'est une hyperbole équilatère de centre $O_k(k,0,0)$

Ses axes sont $O_k+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$ et $O_k+\mathrm{Vect}(\vec{k})$ et d'asymptotes $O_k+\mathrm{Vect}(\vec{\jmath}\pm\vec{k})$.

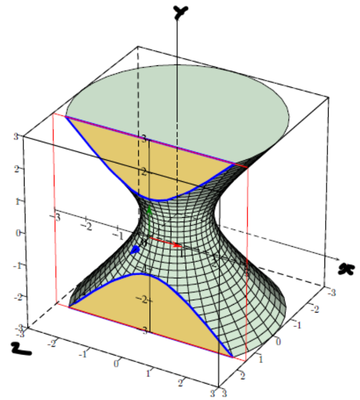
Les sommets sont à une distance $\sqrt{|1-4k^2|}$ de O_k sur $O_k+\mathrm{Vect}(\vec{k})$ si $k\in\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ et sur $O_k(k,0,0)+\mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ sinon.

La surface Σ est un hyperboloïde à une nappe qui n'est pas de révolution

Les sections planes avec un plan $y=k$ sont des ellipses centrées sur l'axe (Oy)



Section plane avec un plan $z=k$ où $|k|>1$



Section plane avec un plan $z=k$ où $|k|<1$