PT : Correction du TD n° 2 sur le chapitre XI

EXERCICE N° 1 Reconnaître l'endomorphisme f associé canoniquement à la matrice A

1) $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\a&-a\end{pmatrix}$ où $a\in\{-1,1\}$

On note C_1 et C_2 les colonnes de la matrice A alors :

Comme $a^2=1$: $C_1.C_2=1-a^2=1-1=0$, $\|C_1\|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+a^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1=\|C_2\|$

(C_1,C_2) BON de $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow A\in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f$ isométrie de $\mathbb{R}^2$

$\det(A)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(1\times -a-a\times 1)=\frac{-2a}{2}=-a$ aussi on doit distinguer deux cas :

cas $a=-1$ alors f est une rotation plane d'angle θ et $A=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\theta\equiv-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]}$

cas $a=1$ alors f est une réflexion plane càd une symétrie orthogonale d'axe D

$D=\mathrm{Ker}\,(A-I_2)=\mathrm{Ker}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}&1\\1&-1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est de dimension 1 et on repère que $(1-\sqrt{2})C_2=C_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}-1\end{pmatrix}\in D$

avec C_i colonne i de la matrice $A-I_2$ vu que $(1-\sqrt{2})\times(-1-\sqrt{2})=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2})^2-1^2=1$

On connaît un vecteur directeur de D donc on possède l'équation de cette droite $D:\ (1-\sqrt{2})x+1\times y=0$

La droite d'équation $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur et $(0,0)\in D\Leftrightarrow c=0$

2) $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A, on vérifie : $C_1.C_2=0$ $\|C_1\|^2=\|C_2\|^2=1$ et $C_1\wedge C_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}=-C_3$

aussi (C_1,C_2,C_3) est une BON indirecte donc $\boxed{f \text{ est la composée d' une rotation vectorielle } r \text{ et d'une réflexion } s}$.

On précise l'angle θ et l'axe D de la rotation r : $D=\mathrm{Ker}\,(A+I_3)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}&0&-1\\1&\sqrt{2}&1\\0&\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est de dimension 1

En notant C_i la colonne i de $A+I_3$, on a : $C_2-C_3=(\sqrt{2}-1)C_1$ vu que $(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-1^2=1$
aussi $u_1=(\sqrt{2}-1,-1,1)\in D$ d'où $D=\mathrm{Vect}(u_1)$ et u_1 est normal au plan $D^\perp$

$\boxed{\text{La réflexion est celle par rapport au plan } D^\perp:\ (\sqrt{2}-1)x-y+z=0}$

Son angle θ vérifie $-1+2\cos\theta=\mathrm{tr}(A)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{\sqrt{2}+2}{4}\Leftrightarrow\theta=\pm\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)\ [2\pi]$

Précisons le signe de $\sin\theta$: $v=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in D^\perp$, $f(v)=Av=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et on compare la 3ème coordonnées dans

$v\wedge f(v)=(\sin\theta)\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{\sin\theta}{\|u_1\|}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ or $v\wedge f(v)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}?\\?\\1\end{pmatrix}$ donc $\sin\theta>0$. Ainsi : $\boxed{\theta=\mathrm{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)}$.

3) $A=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha&\cos\alpha\sin\alpha&\sin\alpha\\\cos\alpha\sin\alpha&\sin^2\alpha&-\cos\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha&0\end{pmatrix}$, $(\alpha\in\mathbb{R})$

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A, on vérifie : $C_2.C_3=\cos\alpha\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cos\alpha=0$ $\|C_3\|^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$\|C_2\|^2=\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^4\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$C_2\wedge C_3=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha\\\cos\alpha\sin\alpha\\-\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha\\\cos\alpha\sin\alpha\\-\sin\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\end{pmatrix}=C_3$

aussi (C_1,C_2,C_3) est une BOND donc $A\in SO_3(\mathbb{R})$ et $\boxed{f \text{ est une rotation vectorielle d'axe D et d'angle } \theta}$.

$D=\mathrm{Ker}\,(A-I_3)=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}\cos^2\alpha-1&\cos\alpha\sin\alpha&\sin\alpha\\\cos\alpha\sin\alpha&\sin^2\alpha-1&-\cos\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha&-1\end{pmatrix}=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}-\sin^2\alpha&\cos\alpha\sin\alpha&\sin\alpha\\\cos\alpha\sin\alpha&-\cos^2\alpha&-\cos\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha&-1\end{pmatrix}$ est de dimension 1. Or, en notant $\hat{C}_i$ la colonne i de $A-I_3$: $\cos\alpha\hat{C}_1+\sin\alpha\hat{C}_2=0$ et donc $\boxed{D=\mathrm{Vect}\big(\underbrace{(\cos\alpha,\sin\alpha,0)}_{=u}\big)}$

θ vérifie $1+2\cos\theta=\mathrm{tr}(A)=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos\theta=0\Leftrightarrow\theta=\pm\frac{\pi}{2};[2\pi]$ et on précise le signe de $\sin\theta$ avec

$v=(0,0,1)\in D^\perp$ vérifie : $v\wedge f(v)=(\sin\theta)u=(\sin\theta)\big(\cos\alpha,\sin\alpha,0\big)$ or $v\wedge f(v)=v\wedge C_2=(\cos\alpha,?,??)$

Ainsi $\sin\theta>0$ et donc $\boxed{\theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]}$

Déterminer la matrice canoniquement associé à une isométrie de $\mathbb{R}^3$

Pour déterminer la matrice A canoniquement associée à une isométrie :

- on commence par déterminer une base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ orthonormée adaptée à la transformation

  si f est une rotation d'axe D d'angle θ alors
  u est unitaire et dirige l'axe D, v est unitaire avec $u \perp v$ et enfin $w = u \wedge v$

  si f est une réflexion par rapport au plan F alors
  u est unitaire et dirige l'axe $D = F^{\perp}$, v est unitaire dans F (soit $u \perp v$) et enfin $w = u \wedge v$

- Dans la base $\mathscr{B}' = (u, v, w)$, on connaît la matrice A′ de f

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si f est la rotation $\qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ si f est la réflexion

- Il reste à utiliser la formule de changement de bases : $A' = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PA'P^{-1}$

  La matrice P de passage de la base canonique $\mathscr{B} = (i, j, k)$ à la base $B' = (u, v, w)$ est une matrice orthogonale (car matrice de passage d'une BON à une BON) donc $P^{-1} = P^{T}$ autrement dit : $A = PA'P^{T}$

EXEMPLE 2 On note $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la réflexion par rapport au plan F d'équation : $x + y + z = 0$

On détermine la matrice dans une base orthonormée adaptée puis on réalise un changement de base orthonormée. On remarque que $(1,1,1)$ dirige la droite $F^{\perp}$ et que $(1,-1,0) \in F$ aussi on pose :

$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ et $w = u \wedge v = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ alors $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une BON adaptée à $F^{\perp} \oplus F = \mathbb{R}^3$

Alors : $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in O_3(\mathbb{R})$. En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$: $P^{T}AP = A' \Leftrightarrow A = PA'P^{T}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{\imath} - \vec{k}$ et d'angle π

$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1)$ dirige l'axe de la rotation. On choisit $v = (0,1,0)$ unitaire orthogonal à u car $u.v = 0$ et on détermine $w = u \wedge v = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1)$ de sorte que $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une BON adaptée à $D \oplus D^{\perp} = \mathbb{R}^3$ où $D = \mathrm{Vect}(u)$

$A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in O_3(\mathbb{R})$. En notant $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a $P^{T}AP = A' \Leftrightarrow A = PA'P^{T}$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$