Exercice n° 6 On considère la fonction $f$ de la variable réelle $x$ d'expression $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}x^{2n+1}$

**1.** Déterminer le domaine de définition de $f$

On reconnaît une somme de série entière lacunaire $\sum_{n\geqslant 1} a_{2n+1}x^{2n+1}$ où $a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$

Remarque : Elle est bien de la forme $\sum a_k x^k$ avec $a_{2n}=0$ et $a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$

• On sait que le domaine de définition est l'un des intervalles $]-R,R[$, $[-R,R]$, $]-R,R]$ ou $[-R,R[$ où R est le rayon de convergence. On calcule le rayon de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert :

$u_n=a_{2n+1}x^{2n+1}\neq 0$ si $x\neq 0$ et $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{|a_{2n+3}x^{2n+3}|}{|a_{2n+1}x^{2n+1}|}=\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)}x^2\sim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{2n^2}x^2\sim x^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}x^2$

si $x^2<1\Leftrightarrow|x|<1$ alors la série CVA donc $R\geqslant 1$ si $x^2>1\Leftrightarrow|x|>1$ la série DVG donc $R\leqslant 1$

Finalement, $R=1$

• Il reste à étudier la définition aux bords de ce domaine soit quand $x=\pm 1$ mais alors :

$|a_{2n+1}x^{2n+1}|=\frac{1}{n(2n+1)}\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n^2}$ donc la série CVA par critère d'équivalence et $f(x)$ existe.

Attention! si $x=-1$, $(-1)^{2n+1}=-1$ aussi les séries $\sum\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ (pour $x=1$) et $\sum\left(-\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}\right)$ (pour $x=-1$) sont de même nature. On peut invoquer le théorème des séries alternées pour la convergence : la série est bien de la forme $(-1)^n u_n$ avec $u_n=\frac{1}{n(2n+1)}$ qui tend vers 0 en décroissant. Toutefois, c'est dommage de rater la CVA...

Conclusion : $\boxed{f \text{ est définie sur } [-1,1]}$

**2.** Pour $x\in]-1,1[$, exprimer $f'(x)$ puis $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On sait que $f$ est $C^\infty$ (donc $C^1$) sur l'intervalle ouvert de convergence soit sur $]-1,1[$.

Pour $x\in]-1,1[$, en dérivant terme à terme : $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n(2n+1)}(2n+1)x^{2n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^{2n}$

On sait que, pour $x\in]-1,1[$ : $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ C'est directement une somme du cours!

aussi $f'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x^2)^n=\boxed{-\ln(1+x^2)=f'(x)}$ car $|x^2|<1$ si $x\in]-1,1[$

On peut aussi utiliser $\ln(1-u)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}$ pour $|u|<1$ avec $u=-x^2$ voir, si besoin, on retrouve ces sommes en intégrant terme à terme : $\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n\Rightarrow-\ln(1-u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{u^k}{k}\Rightarrow_{u=-x}-\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k}$

Dés lors : $f(x)-\underbrace{f(0)}_{=0}=\int_0^x\left(-\ln(1+t^2)\right)dt$ mais par IPP avec $\begin{cases}u'(t)=-1 & u(t)=-t\\ v(t)=\ln(1+t^2) & v'(t)=\frac{2t}{1+t^2}\end{cases}$

$f(x)=\left[-t\ln(1+t^2)\right]_0^x-\int_0^x(-t)\times\frac{2t}{1+t^2}dt=-x\ln(1+x^2)+\int_0^x\underbrace{\frac{2t^2}{1+t^2}}_{=\frac{2(t^2+1-1)}{1+t^2}}dt=-x\ln(1+x^2)+\int_0^x\left(2-\frac{2}{1+t^2}\right)dt$

alors : $f(x)=-x\ln(1+x^2)+[2t-2\operatorname{Arctan}t]_0^x$ autrement dit : $\boxed{f(x)=-x\ln(1+x^2)+2x-2\operatorname{Arctan}x}$

**3.** En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$

On sait que $f$ est continue sur son domaine $[-1,1]$ de définition donc :

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}=f(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-x\ln(1+x^2)+2x-2\operatorname{Arctan}x\right)=-\ln 2+2-2\times\frac{\pi}{4}$ soit $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}=2-\ln 2-\frac{\pi}{2}}$

Remarque : $f(-1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}\times\underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1}=-f(1)=\lim_{x\to-1^+}\left(-x\ln(1+x^2)+2x-2\operatorname{Arctan}x\right)=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$



EXERCICE N° 1

3. $\sum\left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)z^n$

On commence par chercher un équivalent de $a_n=\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}=(n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n}}=n^{\frac{1}{n}}\left((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}-1\right)$

$(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}-1=\exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})\right)-1=\exp\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1=\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $n^{\frac{1}{n}}=\exp\left(\frac{\ln n}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

Ainsi : $a_n\sim 1\times\frac{1}{n^2}$ et on sait que $\sum a_n z^n$ et $\sum\frac{z^n}{n^2}$ ont le même rayon de convergence.

Or le rayon de convergence de $\sum\frac{z^n}{n^2}$ est le même que celui de $\sum z^n$ soit $\boxed{R=1}$

OU BIEN (si on ne se souvient plus de ce résultat de cours) Règle de d'Alembert avec $u_n=\frac{z^n}{n^2}$.

Pour $z\neq 0$ : $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{(n+1)^2}{n^2}|z|\sim|z|$. Si $|z|<1$, la série CVA d'où $R\geqslant 1$ Si $|z|>1$, la série DVG d'où $R\leqslant 1$. $\boxed{R=1}$

4. $\sum a_n x^n$ où $a_n=\begin{cases}\operatorname{ch}(n) \text{ si } n \text{ est pair}\\ e^{-n} \text{ si } n \text{ est impair}\end{cases}$

Étudions les séries lacunaires $\sum a_{2n}x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$

• $\sum a_{2n}x^{2n}=\sum\operatorname{ch}(2n)x^{2n}$ or $\operatorname{ch}(2n)\sim\frac{e^{2n}}{2}$ donc $\sum a_{2n}x^{2n}$ a la même rayon que $\sum\frac{e^{2n}}{2}x^{2n}=\frac{1}{2}\sum(e^2x^2)^n$

Elle CVA si $e^2x^2<1\Leftrightarrow|x|<\frac{1}{e}$ et DVG si $e^2x^2>1\Leftrightarrow|x|>\frac{1}{e}$

• $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum e^{-(2n+1)}x^{2n+1}=\left(\frac{x}{e}\right)\sum\left(\frac{x^2}{e^2}\right)^n$ Elle CVA si $\frac{x^2}{e^2}<1\Leftrightarrow|x|<e$ et DVG si $\frac{x^2}{e^2}>1\Leftrightarrow|x|>e$

Fort heureusement ici, les deux rayons sont distincts : $\frac{1}{e}<e$ et c'est ce qui va nous permettre de conclure.

Si $\frac{1}{e}<|x|<e$, la série $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$ diverge grossièrement. De ce fait, la suite $(a_nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 sinon la suite extraite $(a_{2n+1}|x|^{2n+1})$ convergerait aussi vers 0 ce qui est contradictoire avec la DVG annoncée. Aussi la série $\sum a_nx^n$ DVG lorsque $\frac{1}{e}<|x|<e$ et on peut conclure que $R\leqslant\frac{1}{e}$.

Si $|x|<\frac{1}{e}$, les deux séries $\sum a_{2n}x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$ convergent donc $\sum a_nx^n$ converge aussi et donc $R\geqslant\frac{1}{e}$

On prouve la convergence en revenant aux sommes partielles de la séries $\sum a_nx^n$

$S_{2N+1}=\sum_{k=0}^{2N}a_kx^k=\sum_{n=0}^{N}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{N}a_{2n+1}x^{2n+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=S(x)$

$S_{2N}=S_{2N+1}-a_{2N+1}x^{2N+1}$ or $a_{2N+1}x^{2N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$ (terme général de $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$ qui CV) donc $S_{2N}\xrightarrow[N\to+\infty]{}S(x)-0$

On peut donc conclure (voir chapitre série) : $\begin{cases}S_{2N}\xrightarrow[N\to+\infty]{}S(x)\\ S_{2N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}S(x)\end{cases}\Rightarrow S_N\xrightarrow[N\to+\infty]{}S(x)$

Finalement : $\boxed{R=\frac{1}{e}}$

5. $\sum a_nz^n$ où $a_n$ est la nieme décimale de $\sqrt{2}$

Typiquement, c'est un énoncé pour « faire peur » alors que la résolution est très simple

Les nombres $a_n$ vérifient tous $a_n\in[\![0,9]\!]$ donc : $|a_nz^n|\leqslant 9|z|^n$

La série $\sum 9z^n$ est géométrique de rayon de convergence 1.

Si $|z|<1$, $\sum 9z^n$ CVA $\Rightarrow\sum a_nz^n$ CVA par majoration et donc $R\geqslant 1$.

Pour $z=1$, la suite $(a_n1^n)=(a_n)$ d'entiers ne peut pas tendre vers 0 sinon elle est forcément stationnaire à 0 et cela conduirait à $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$! La série diverge donc grossièrement pour $z=1$ d'où $R\leqslant 1$

Finalement : $\boxed{R=1}$

EXERCICE N° 2 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières

5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(n+2)}$

• Rayon de convergence : On pose $a_n=\dfrac{1}{n(n+2)}$ et $u_n=a_nx^n$

Méthode n° 1 : $a_n\sim\dfrac{1}{n^2}$ donc $\sum a_nx^n$ a le même rayon de convergence que $\sum\dfrac{x^n}{n^2}$ soit R = 1 celui de la série géométrique

Méthode n° 2 : Avec la règle de d'Alembert, si $x\neq 0$ : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\dfrac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)}\times|x|\sim|x|\xrightarrow[n\to+\infty]{}|x|$

Si $|x|<1$, il y a CVA donc $R\geqslant 1$. Si $|x|>1$, il y a DVG donc $R\leqslant 1$. Aussi $\boxed{R=1}$.

• Calcul de la somme : R = 1 indique qu'on va être dans la famille géométrique

On décompose en éléments simples : on cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+2}=\frac{(a+b)n+2a}{n(n+2)}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\2a=1\end{cases}\Leftrightarrow a=-b=\frac{1}{2}$$

Alors, pour $|x|<1$ : $\displaystyle S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}\right)$

On peut séparer les sommes car on sait que 2 sommes sur 3 convergent $\sum a_nx^n$ et $\sum\frac{x^n}{n}$ pour $|x|<1$

La présence de $n$ au dénominateur indique qu'on va travailler par intégration terme à terme

On sait, en intégrant terme à terme la série géométrique, que : si $|t|<1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}t^n=\frac{1}{1-t}\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-t)-(-0)$

A l'aide de changement d'indice (ou de variables), on transforme S$(x)$ en posant $n=k+1\Leftrightarrow k=n-1$ dans la première somme et $n=k-1\Leftrightarrow k=n+1$ dans la seconde : $\displaystyle S(x)=\frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}}_{=-\ln(1-x)}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{k+1}\Bigg)$

Pour $x\neq 0$ : $\displaystyle S(x)=\frac{1}{2}\Bigg(-\ln(1-x)-\frac{1}{x^2}\times\underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1}}_{=-\ln(1-x)-\left(\frac{x^{0+1}}{0+1}+\frac{x^{1+1}}{1+1}\right)}\Bigg)=\boxed{-\frac{1}{2}\ln(1-x)-\frac{1}{2x^2}\times\left(-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right)=S(x)}$

Pour $x=0$ : $\boxed{S(0)=0}$

6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}$

• Rayon de convergence : On pose $a_n=\dfrac{1}{(4n+1)!}$ et $u_n=a_nx^{4n+1}$. Avec la règle de d'Alembert, si $x\neq 0$ :

$\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\dfrac{(4n+1)!}{(4n+5)!}\times|x|^4\sim\dfrac{|x|^4}{(4n)^4}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc CVA pour tout $x$ réel et $\boxed{R=+\infty}$

• Calcul de la somme : $R=+\infty$ indique qu'on va être dans la famille exponentielle

On remarque qu'il n'y a que des exposants impairs donc on pense au développement de $\sin x$ et $\operatorname{sh}x$

On sait que, pour tout $x$ réel : $\displaystyle\operatorname{sh}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\displaystyle\sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$4k+1=2(2k)+1$ aussi il s'agit de faire disparaître tous les coefficients $n=2k+1$ de ces sommes.C'est ce qu'on a fait dans $\operatorname{ch}(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ où on fait disparaître les coefficients d'indice impair de la somme de $e^x$

$$=\begin{cases}2\text{si } n=2k\\0\text{ si } n=2k+1\end{cases}$$

On a : $\displaystyle\operatorname{sh}x+\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\overbrace{1+(-1)^n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(2(2k)+1)!}x^{2(2k)+1}=2S(x)$ donc $\boxed{S(x)=\dfrac{\sin x+\operatorname{sh}x}{2}}$

Pour faire disparaître les coefficients d'indice pair, on fait la différence :

$$=\begin{cases}2\text{si } n=2k+1\\0\text{ si } n=2k\end{cases}$$

$\displaystyle\operatorname{sh}x-\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\overbrace{1-(-1)^n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(2(2k+1)+1)!}x^{2(2k+1)+1}=2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}$



3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{2n+1}$

• Rayon de convergence : On pose $a_n=\dfrac{1}{2n+1}$ et $u_n=a_nx^n$

$a_n\sim\dfrac{1}{2n}$ donc $\sum a_nx^n$ a le même rayon de convergence que $\sum\dfrac{x^n}{n}$ soit $\boxed{R=1}$ (idem série géométrique)

Une expression polynômiale au dénominateur d'obtient à l'aide du théorème d'intégration terme à terme :

$\boxed{\text{Important ! On obtient } \dfrac{1}{n+1} \text{ par intégration de } x^n \text{ mais } \dfrac{1}{2n+1} \text{ par intégration de } x^{2n}}$

On sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n=\frac{1}{1-x^2}$ pour $|x^2|<1\Leftrightarrow|x|<1$

Par intégration termes à termes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$ pour $|x|<1$

On obtient cette primitive en décomposant en éléments simples :

$\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Big[-\ln|1-t|+\ln|1+t|\Big]_0^x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ car $1+x>0$ et $1-x>0$ si $x\in]-1,1[$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ pour $|x|<1$ (Relation $(*)$)

Il reste à gérer la puissance de $x$ car le numérateur est en $x^n$ et pas en $x^{2n+1}$

Cela conduit à distinguer les cas $x>0$ et $x<0$...

Si $0<x<1$ : $x^n=\left(\sqrt{x}\right)^{2n}$ et donc $\displaystyle S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\times\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$

en utilisant l'évaluation de la somme $(*)$ en $\sqrt{x}$ qui est bien tel que $|\sqrt{x}|<1$

Si $x=0$ : $S(0)=1$ car seul le terme d'indice $n=0$ n'est pas nul dans $\displaystyle S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}$

Si $-1<x<0$ : $x=-|x|$ d'où $x^n=(-1)^n|x|^n=(-1)^n\left(\sqrt{|x|}\right)^{2n}$ donnant $\displaystyle S(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\sqrt{|x|}\right)^{2n+1}}{2n+1}$

Attention ! Cette fois, on ne peut pas utiliser $(*)$ à cause du coefficient $(-1)^n$ mais il faut calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

On sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nx^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$ pour $|x^2|<1\Leftrightarrow|x|<1$

Par intégration termes à termes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\operatorname{Arctan}x$ pour $|x|<1$ (Relation $(**)$)

et, en évaluant en $\sqrt{|x|}\in]-1,1[$, on obtient de ce fait : $S(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{|x|})$

Finalement : $\displaystyle S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) & \text{si } x\in]0,1[\\ 1 & \text{si } x=0\\ \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{|x|}) & \text{si } x\in]-1,0[\end{cases}$

Remarque : En temps que somme d'une série entière, on sait que S est une fonction $C^\infty$ sur $]-1,1[$

Prouver ce résultat à partir de la définition à l'aide des 3 expressions seraient fastidieux...

Rien que la continuité en $x=0$ nécessite de vérifier les limites à gauche et à droite :

$\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{|x|})\sim_{x\to0^-}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\times\sqrt{|x|}\sim_{x\to0^-}1\xrightarrow[x\to0^-]{}1=S(0)$ donc continue à gauche en 0

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln(1+\sqrt{x})-\ln(1-\sqrt{x})\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+o(\sqrt{x})-(-\sqrt{x}+o(\sqrt{x})\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2\sqrt{x}+o(\sqrt{x})\right)=1+o(1)\xrightarrow[x\to0^+]{}1=S(0)\quad\text{OUF !}$$