EXERCICE N° 3 Étudier et construire la courbe Γ : $\begin{cases} x(t) = \left(t+\dfrac{1}{t}\right)\ln t \\ y(t) = \left(t-\dfrac{1}{t}\right)\ln t \end{cases}$. On pourra rechercher une transformation géométrique permettant de construire le point de paramètre $\dfrac{1}{t}$ à partir du point de paramètre t et en déduire une réduction du domaine d'étude.

On note $M(t)$ le point de paramètre t de coordonnées $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Définition et domaine d'étude : x et y sont C^∞ sur $]0,+\infty[$.

Il n'y a pas de parité ou de périodicité. Par contre, pour $t>0$, on a : $x(\frac{1}{t}) = -x(t)$ et $y(\frac{1}{t}) = y(t)$.

Les points $M(t)$ et $M(\frac{1}{t})$ sont donc symétriques par rapport à l'axe $O + \text{Vect}(\vec{j})$.

Il suffit d'étudier la courbe pour $t \in]0,1] = D$ pour obtenir par symétrie le tracé pour $t \in [1,+\infty[$.

Commentaires : En effet : $t \in]0,1] \Leftrightarrow \frac{1}{t} \in [1,+\infty[$

Variations communes sur D : $\forall t \in]0,1]$, $x'(t) = \left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)\ln t + \underbrace{\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\times\dfrac{1}{t}}_{>0}$ et $\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)\ln t = \dfrac{\overbrace{1-t^2}^{\leqslant 0}}{t}\times\underbrace{\ln t}_{\leqslant 0} \geqslant 0$

Commentaires : Pas de factorisation possible donc on examine le signe de chacun des termes

Par somme de termes positifs dont l'un est strictement positif : $x'(t) > 0$ sur D

De même : $y'(t) = \left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\ln t + \left(t-\dfrac{1}{t}\right)\times\dfrac{1}{t} = \underbrace{\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\ln t}_{\leqslant 0} + \underbrace{\dfrac{t^2-1}{t^2}}_{\leqslant 0} \leqslant 0$ soit $y'(t) \leqslant 0$ sur D

et : $y'(t) = 0 \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\ln t = 0 = \dfrac{t^2-1}{t^2} \Leftrightarrow \ln t = 0 = t^2-1 \Leftrightarrow t=1$ soit $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Commentaires : une somme de termes de même signe est nulle si tous les termes sont nuls

t	0	1
$x'(t)$	‖	$+$ |
x	‖ $-\infty$ ↗	0
y	‖ $+\infty$ ↘	0
$y'(t)$	‖	$-$ 0

Limites et valeurs extrêmes : Comme $\ln 1 = 0$, on a : $x(1) = y(1) = 0$

$x(t) = \dfrac{t^2+1}{t}\ln t \sim_0 \dfrac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$ OU BIEN $x(t) = \underbrace{\left(t+\dfrac{1}{t}\right)}_{\xrightarrow[t\to0^+]{}+\infty} \times \underbrace{\ln t}_{\xrightarrow[t\to0^+]{}-\infty} \xrightarrow[t\to 0^+]{} -\infty$

$y(t) = \dfrac{t^2-1}{t}\ln t \sim_0 -\dfrac{\ln t}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$ OU BIEN $y(t) = \underbrace{\left(t-\dfrac{1}{t}\right)}_{\xrightarrow[t\to0^+]{}-\infty} \times \underbrace{\ln t}_{\xrightarrow[t\to0^+]{}-\infty} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$

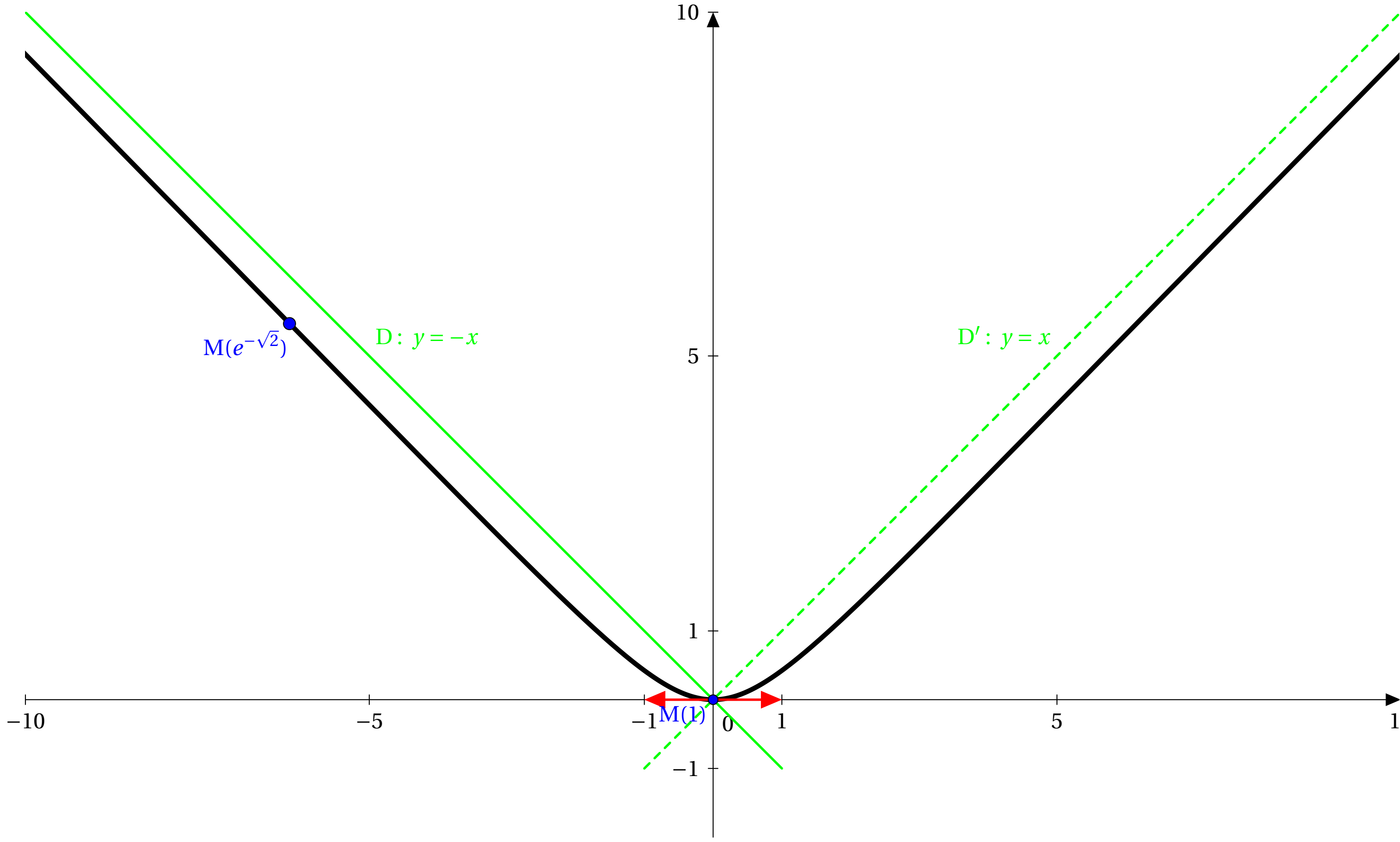
Commentaires : Il s'agit in fine d'une limite usuelle $\infty\times\infty$ qui n'est pas indéterminée
Invoquer un résultat de croissance comparée pour conclure est donc hors sujet...

- Il y a une tangente horizontale à l'origine $O = M(1)$ *Commentaires : car $y'(1) = 0$ mais $x'(1) \neq 0$*
- Il y a une branche infinie si $t \to 0$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \sim_0 -1$ puis $y(t)+x(t) = 2t\ln t \xrightarrow[t\to 0^-]{} 0$ ainsi il y a une asymptote d'équation $y = -x$ et $y(t)+x(t) = 2t\ln t < 0$ en 0^+ donc la courbe est sous l'asymptote.
- Le tracé amène à envisager l'existence d'un point d'inflexion qui ne serait pas stationnaire (ie $p=1$ impaire et q impaire). En ce point $M(t)$, on aura donc $f'(t)$ et $f''(t)$ colinéaire (car $q \geqslant 3$).

  On résout donc sur $]0,1]$ $\det(f'(t), f''(t)) = 0$ Après un peu de calcul, on trouve : $\det(f'(t), f''(t)) = \dfrac{8-4(\ln t)^2}{t^3}$

  Aussi : $\det(f'(t), f''(t)) = 0 \Leftrightarrow (\ln t)^2 = 2 \Leftrightarrow |\ln t| = \sqrt{2} \Leftrightarrow -\ln t = \sqrt{2} \Leftrightarrow t = e^{-\sqrt{2}} = a$

  Le point $M(a)$ est un point d'inflexion de coordonnées : $x(a) = 2\,\text{ch}(\sqrt{2})\times -\sqrt{2} \simeq -6,16$ et $y(a) = -2\,\text{sh}(\sqrt{2})\times -\sqrt{2} \simeq 5,47$


10
5
1
−1
−10
−5
−1
0
1
5
1
$M(e^{-\sqrt{2}})$
D : $y = -x$
D′ : $y = x$
M(1)

EXERCICE N° 4 Étudier et construire la courbe Γ : $\begin{cases} x(t) = t^2 e^t \\ y(t) = \dfrac{e^t}{t+1} \end{cases}$

On note M(t) le point de paramètre t de coordonnées $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- Définition et domaine d'étude : x est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et y est C^∞ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

  Commentaires :Le domaine de définition n'est pas centré en zéro donc pas de parité/imparité

  La singularité $t = -1$ n'est pas périodique donc pas de périodicité

  On mène l'étude sur $D = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

Variations communes : Pour $t \in D$:

$x'(t) = (2t + t^2)e^t = (2+t)te^t$ donc $x'(t)$ a le signe et les zéros de $t(2+t)$

$y'(t) = \dfrac{(t+1-1)e^t}{(t+1)^2} = \dfrac{te^t}{(t+1)^2}$ donc $y'(t)$ a le signe et les zéros de t

Par les théorèmes usuels sur les limites , on a :

, $x(-2) = 4e^{-2}$, $x(-1) = -e^{-1}$, $x(0) = 0$, $x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ (produit)

$y(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ (produit), $y(-2) = -e^{-2}$, $y(t) \sim_{-1} \dfrac{1}{e(t+1)} \xrightarrow[t\to-1^\pm]{} \pm\infty$ (quotient), $y(0) = 1$ et

t	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	e^{-1}	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	$\vert$	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Pour les limites qui sont à priori des formes indéterminées, on peut conclure avec le résultats sur les croissances comparées :

$x(t) = t^2 e^t \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$

$y(t) \sim_{+\infty} \dfrac{e^t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

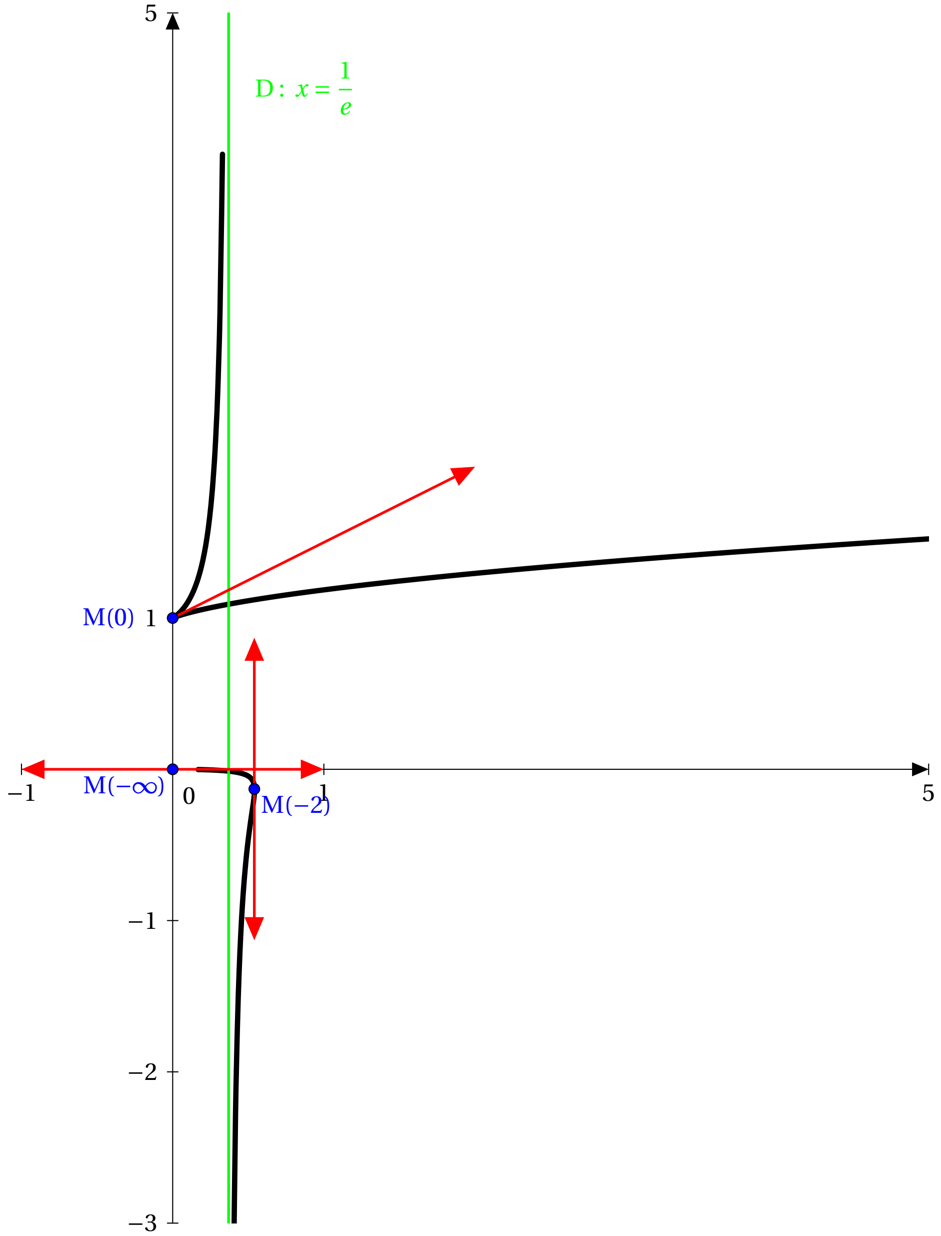
- L'origine est un point limite en $-\infty$. On précise la tangente en ce point limite en étudiant la limite des pentes :
  $\dfrac{y(t)-0}{x(t)-0} = \dfrac{t+1}{t^2} \sim_{-\infty} \dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$ donc la tangente à l'origine est horizontale.

- Il y a une tangente verticale en M(-2) $\begin{pmatrix} 4e^{-2} \\ -e^{-2} \end{pmatrix}$

- Il y a une asymptote verticale d'équation $x = \dfrac{1}{e}$

- Il y a un point stationnaire en M(0) et :
  $$f(t) = \begin{pmatrix} t^2(1+t+o(t)) \\ (1-t+t^2-t^3+o(t^3))(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+t^3+o(t^3) \\ 1+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{3}t^3+o(t^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$$
  La tangente est donc dirigée par $f^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $p = 2$ et la dérivée suivante non colinéaires est $f^{(3)}(0)$ donc $q = 3$: c'est un point de rebroussement de première espèce.

- On étudie la branche infinie en $+\infty$: $\dfrac{y(t)}{x(t)} \sim_{+\infty} \dfrac{e^t}{t} \times \dfrac{1}{t^2 e^t} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^3} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$
  Il s'agit donc d'une branche parabolique dans la direction de l'axe $(O, \vec{\imath})$


5
D : $x = \frac{1}{e}$
M(0) 1
−1
M(−∞)
0
1
M(−2)
5
−1
−2
−3

EXERCICE N° 5 Étudier et construire la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = (1+\sin t)\cos t \end{cases}$

On note $\mathrm{M}(t)$ le point de paramètre t de coordonnées $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Définition et domaine d'étude : x et y sont C^∞ sur $\mathbb{R}$

- x et y sont 2π périodique donc une étude sur un intervalle d'amplitude 2π suffit
- La parité n'aboutit pas mais $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$ donc les points $\mathrm{M}(t)$ et $\mathrm{M}(\pi - t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $\mathrm{O} + \mathrm{Vect}(\vec{\imath})$ aussi on peut mener l'étude sur $\mathrm{D} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ car par symétrie on obtiendra la courbe sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et donc le tracé sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ d'amplitude 2π *En effet :* $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leqslant \pi - t \leqslant \frac{3\pi}{2}$

Commentaires :Le domaine d'amplitude 2π *doit être centré au milieu de* t *et* $\pi - t$ *soit en* $\frac{\pi}{2}$ *pour exploiter la symétrie*

Variations communes sur D : On a : $x'(t) = -2\cos t \sin t$ et $y'(t) = \cos^2 t - (1+\sin t)\sin t = 1 - \sin t - 2\sin^2 t$

Sur $\mathrm{D} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0$ ou $\sin t = 0$ soit $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ ou $t = 0$

De plus : $\cos t \geqslant 0$ donc $x'(t)$ a le signe opposé de $\sin t$ donc : $x'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Factorisons $y'(t)$: on remarque que $y'(t) = \mathrm{P}(\sin t)$ où $\mathrm{P} = 1 - \mathrm{X} - 2\mathrm{X}^2$ or P admet -1 pour racine évidente, l'autre racine est $\frac{1}{2}$ d'où $\mathrm{P} = -2(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X} - \frac{1}{2})$ et ainsi : $y'(t) = -2(\sin t + 1)(\sin t - \frac{1}{2})$

Par suite, sur D : $y'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = -1$ et $\sin t = \frac{1}{2}$ soit $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2}$ et $t = \frac{\pi}{6}$

De plus : $\sin t + 1 \geqslant 0$ donc $y'(t)$ a le signe de $\frac{1}{2} - \sin t$ aussi : $y'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$

t	$-\pi/2$		0		$\pi/6$		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$3/4$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/4$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$

Commentaires : on a aussi $y'(t) = \cos(2t) - \sin t$

et chercher les zéros de $y'(t)$ *via la résolution de* $\cos(2t) = \sin t$

où on se ramène à une équation de référence $\cos x = \cos a$ *:*

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(2t) = \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow 2t \equiv \frac{\pi}{2} - t\ [2\pi]$ *ou* $2t \equiv -\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ *ou* $t \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

et donc, sur $\mathrm{D} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *:* $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6}$ *ou* $t = -\frac{\pi}{2}$

Toutefois, cette approche n'est plus pertinente pour l'étude du signe...

Branches infinies Il n'y a pas de branches infinies.

Tangentes particulières Il y a une tangente verticale en $\mathrm{M}(0) = (1,1)$ et en $\mathrm{M}(\pi/2) = \mathrm{O}$

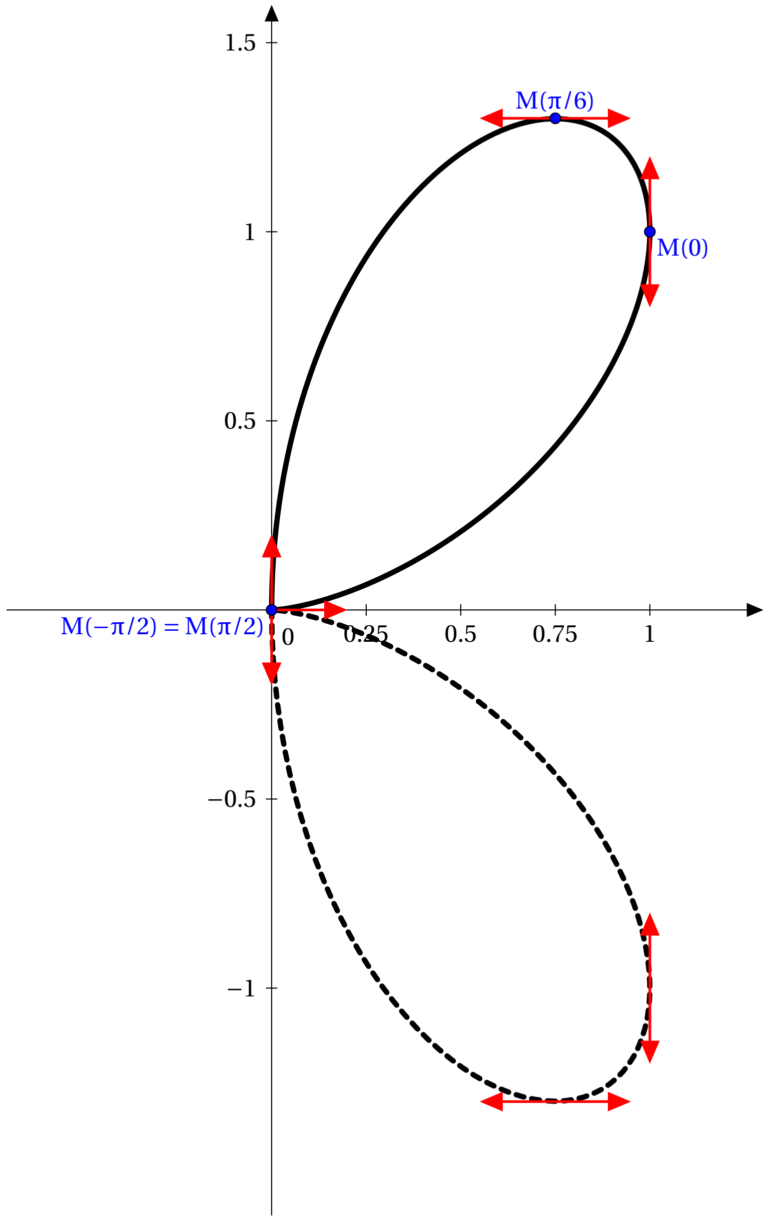
Il y a une tangente horizontale en $\mathrm{M}(\pi/6)(3/4; 3\sqrt{3}/4)$. Il y a un point stationnaire en $\mathrm{M}(-\pi/2) = \mathrm{O}$.

On pose $h = t + \frac{\pi}{2} \xrightarrow[t \to -\pi/2]{} 0$ alors :

$$f(t) = f\left(h - \tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \sin^2 h \\ (1 - \cos h)\sin h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h + o(h^2))^2 \\ (\frac{h^2}{2} + o(h^2))(h + o(h)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 + o(h^3) \\ \frac{h^3}{2} + o(h^3) \end{pmatrix} = \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(h^3) \\ o(h^3) \end{pmatrix}$$

La première dérivée non nulle est $f^{(2)}(-\pi/2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc la tangente est horizontale en $\mathrm{M}(-\pi/2) = \mathrm{O}$ et $p = 2$

La dérivée suivante non colinéaire est pour $q = 3$ donc c'est un point de rebroussement de première espèce.


1.5
1
0.5
−0.5
−1
0
0.25
0.5
0.75
1
M(π/6)
M(0)
M(−π/2) = M(π/2)