

On définit f sur $M_2(\mathbb{R})$ par $f(A) = (a+b)X^2 + (b+c)X + (c+d)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

et également $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], M_2(\mathbb{R}))$ canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. (a) On admet que f est linéaire. Rappeler ce que cela signifie.

Ici : $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X])$ s'écrit $\forall (A, B) \in M_2(\mathbb{R})^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha A + B) = \alpha f(A) + f(B)$
Le choix des notations est libre mais c'est quand même plus clair quand on les choisit bien...

- (b) Préciser Ker f . En déduire que f est surjective non injective.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow (a+b)X^2 + (b+c)X + (c+d) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=-b=a \\ d=-c=-a \end{cases} \text{ donc Ker } f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

f n'est pas injective puisque $\dim \text{Ker } f = 1 \neq 0$.

Par le théorème du rang, $\dim \text{Im } f = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \text{Ker } f = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ or $\text{Im } f \subset \mathbb{R}_2[X]$ donc $\text{Im } f = \mathbb{R}_2[X]$ et on peut donc conclure que f est surjective.

- (c) Donner la matrice canoniquement associée à f .

Méthode 1 : Par définition, la matrice cherchée est $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}_{can}}(f) = \text{Mat}_{(1, X, X^2)}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$ où $\mathcal{B}_{can} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_{can} = (1, X, X^2)$ celle de $\mathbb{R}_2[X]$.

On calcule : $\begin{cases} f(E_{11}) = X^2 \\ f(E_{12}) = X^2 + X \\ f(E_{21}) = X + 1 \\ f(E_{22}) = 1 \end{cases}$ donc la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Méthode 2 : On utilise l'écriture matricielle. Puisque $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X])$, la matrice M cherchée aura 4 colonnes et 3 lignes. La

relation vectorielle $f \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = (c+d) + (b+c)X + (a+b)X^2$ s'écrit matriciellement sous la forme $MX = Y$ où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

$$\text{et } Y = \begin{pmatrix} c+d \\ b+c \\ a+b \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ b+c \\ a+b \end{pmatrix}$$

2. Justifier que g est injective non surjective.

On sait que $\text{rg}(g) = \text{rg} B = \dim \text{Im } B = \dim \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ où C_i est la i ème colonne de B .

Aussi : $\text{rg}(g) \leq 3 \Rightarrow \dim \text{Im}(g) \neq 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$ donc $\text{Im}(g) \neq M_2(\mathbb{R})$ et g n'est pas surjective.

On vérifie facilement l'indépendance linéaire de C_1, C_2 et C_3 justifiant que $\text{rg}(g) = 3$:

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker } g = \dim \mathbb{R}_2[X] - \text{rg} g = 3 - 3 = 0$ et donc $\text{Ker } g = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et g est injective.

3. Préciser la matrice canoniquement associée à $g \circ f$ et l'image par $g \circ f$ de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Puisqu'on connaît les matrices de g et f , on obtient la matrice de la composée par produit :

$$g \circ f \text{ canoniquement associée à } B \times A = \dots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (g \circ f)(M) \text{ de coordonnées BA} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ -a+c \\ b+c \\ -a-b+c+d \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } g \circ f(M) = \begin{pmatrix} c+d & -a+c \\ b+c & -a-b+c+d \end{pmatrix}$$

4. Prouver que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f$ puis que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$

$M \in \text{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow g(f(M)) = 0 \Leftrightarrow f(M) \in \text{Ker}(g) \Leftrightarrow_{\text{car Ker } g = \{0\} \text{ avec Q1}} f(M) = 0 \Leftrightarrow M \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$

$$\text{OU BIEN } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow \begin{cases} c+d=0 \\ -a+c=0 \\ b+c=0 \\ -a-b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-c \\ 0=-c \\ b=-c \\ -a-b+c-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} c & -c \\ c & -c \end{pmatrix} \Leftrightarrow M \in \text{Ker } f$$

Par le théorème du rang, $\dim \text{Im}(g \circ f) = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \text{Ker}(g \circ f) = 4 - 1 = 3 = \dim \text{Im } f$

et l'inclusion $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ est claire puisque $\forall A \in M_2(\mathbb{R}), g \circ f(A) = g(f(A)) \in \text{Im } g$

d'où l'égalité $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$ (même dimension et une inclusion)

Démontrer une équivalence ou une implication

- Une proposition écrite en « Si PropositionA alors PropositionB » se traduit par une implication logique : PropositionA $\Rightarrow$ PropositionB

On dit alors que : la PropositionA est une condition suffisante pour obtenir la PropositionB

ou que : la PropositionB est une condition nécessaire pour la PropositionA

Pour la démontrer, on suppose vraie la PropositionA et on démontre qu'alors la PropositionB est vraie.

Je vous conseille, dans un premier temps, de respecter un schéma de preuve en :

Je sais PropositionA en explicitant, en langage mathématique, les définitions et symboles utilisés dans la proposition

Je veux PropositionB en explicitant, en langage mathématique, les définitions et symboles utilisés dans la proposition

Je prouve où on explicite le raisonnement logique conduisant à obtenir la véracité de la PropositionB à l'aide de la PropositionA

- Une proposition écrite en « PropositionA si et seulement si PropositionB » se traduit par une équivalence logique : PropositionA $\Leftrightarrow$ PropositionB

On dit alors que : la PropositionA est une condition nécessaire et suffisante pour la PropositionB (et

réciroquement). Pour démontrer une équivalence, on procède, en général, en deux temps en démontrant

les deux implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$

EXEMPLE N°4 Soit E un K ev de dimension finie n et f un endomorphisme de E . Montrer l'équivalence :

$$\text{Ker } f = \text{Im } f \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg } f$$

On prouve cette équivalence par double implication.

($\Rightarrow$) On sait que $\text{Ker } f = \text{Im } f$

On prouve : $\forall x \in E, f^2(x) = f(f(x))$ or $f(x) \in \text{Im } f = \text{Ker } f$ d'où $f(f(x)) = 0$ et donc $f^2 = 0$.

De plus, par le théorème du rang, on sait : $n = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f = 2\text{rg } f$ car $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f = \text{rg } f$.

($\Leftarrow$) On sait que : $1) f^2 = 0$ c'est-à-dire $\forall x \in E, f^2(x) = 0$ et $2) n = 2\text{rg}(f)$

On prouve : Puisqu'on veut prouver une égalité de sev, il suffit d'établir que :

- les deux sev ont la même dimension - il y a une inclusion entre les deux sev

Le théorème du rang conduit à : $n = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$

donc, avec 2) : $2\text{rg } f = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f$.

D'autre part : $\forall y \in \text{Im } f, \exists x \in E, y = f(x)$ d'où $f(y) = f^2(x) = 0$ soit $y \in \text{Ker } f$. Ainsi, $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 13 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

- Calculer l'image par f de $P = -X^2 + 3X + 2$. Que peut-on en déduire pour l'application f ?

Les coordonnées de P dans $\mathcal{B}_{can} = (1, X, X^2)$ sont $X_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ aussi les coordonnées de $f(P)$ sont $AX_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Le polynôme P est donc dans $\ker f$ et $P \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ donc $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$: f n'est pas injective.

Autre rédaction possible : $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f(P)) = A \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(P) = A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow P = 0 + 0 \times X + 0 \times X^2 = 0$

- Préciser le noyau et l'image de f .

Notons c_1, c_2, c_3 les colonnes de A . On remarque que : $2c_1 + 3c_2 - c_3 = 0$. De plus, c_2 et c_3 sont non colinéaires. Aussi : $\text{Im } A = \text{Vect}(c_1, c_2, c_3) = \text{Vect}(c_2, c_3)$ de dimension 2 donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$ et on obtient une base de $\text{Im } f$ si on trouve deux vecteurs de $\text{Im } f$ non colinéaires. Les colonnes c_2 et c_3 de A donnent les coordonnées de $f(X)$ et $f(X^2)$ qui sont ainsi deux vecteurs de $\text{Im } f$ non colinéaires.

Ainsi : $\text{Im } f = \text{Vect}(-2 - 4X - 8X^2, -2X^2) = \text{Vect}(1 + 2X + 4X^2, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ (en simplifiant par colinéarité les vecteurs)

Par le théorème du rang, on a : $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}_2[X] - \text{rg } f = 3 - 2 = 1$ or on connaît un vecteur non nul de $\ker f$ qui est de dimension 1 donc on connaît une base de $\ker f$ et $\ker f = \text{Vect}(P)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Attention au SENS : $\text{Im } A$ et $\ker A$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$ alors que $\text{Im } f$ et $\ker f$ sont des sev de $\mathbb{R}_2[X]$...

- Donner la matrice canoniquement associée à $f + id$. En déduire un polynôme Q de $\ker(f + id)$.

$f + id$ est canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 13 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ et on remarque que : $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vu que $C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$

On en déduit que $Q = 1 + 2X + X^2 \in \ker(f + id)$.

On répond à la question posée : ce n'est pas la peine de déterminer le noyau en totalité!

- Proposer de même un polynôme R de $\ker(f - 2id)$.

$f - 2id$ est canoniquement associée à $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 13 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ aussi $(f - 2id)(X^2) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et $R = X^2 \in \ker(f - 2id)$.

Une colonne de 0 dans une matrice donne systématiquement un vecteur du noyau!

- Prouver que $\mathcal{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice A' de f dans cette base.

On vérifie que $\mathcal{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Comme $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ il suffit de justifier que la famille est libre.

Méthode n°1 (pour les 5/2... et bientôt pour les 3/2) : on utilise un déterminant car

(P, Q, R) libre $\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}_{can}}(P, Q, R) \neq 0 \Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(P, Q, R)$ est inversible (la matrice de passage est inversible)

$$\text{Or : } \det_{\mathcal{B}_{can}}(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 3 \times 1 = 1 \neq 0.$$

Méthode n°2 : on revient à la définition de l'indépendance linéaire

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha P + \beta Q + \gamma R = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

un polynôme est nul si ces coefficients le sont

Pour obtenir A' , on utilise la définition de $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et on exploite les informations obtenues dans le sujet

$$\begin{cases} f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ f(Q) = -Q \text{ car } Q \in \ker(f + id) \\ f(R) = 2R \text{ car } R \in \ker(f - 2id) \end{cases} \text{ donc } A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(P), f(Q), f(R)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Préciser les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Exprimer A' à l'aide de A et P .

$$\text{Si } M = P_{\mathcal{B}_{can} \rightarrow \mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q, R) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{can}} \text{ (à faire)}$$

La formule de changement de bases pour les endomorphismes s'écrit alors : $A' = M^{-1}AM$.

Le choix de la notation M pour la matrice de passage est lié au fait que les notations P, Q et R sont déjà utilisés.

Pour obtenir M^{-1} , vous pouvez utiliser l'algorithme du pivot de Gauss...ou pas. Voici une autre approche :

Détermination de $M^{-1} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{can}}$:

Par définition, $M^{-1} = \text{Mat}_{(\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})}(1, X, X^2)$ où $P = -X^2 + 3X + 2$, $Q = 1 + 2X + X^2$ et $R = X^2$

Alors : $X^2 = R = 0 \times P + 0 \times Q + 1 \times R$ d'où la colonne 3 de M^{-1}

Ensuite, on peut éliminer le terme constant par :

$$2Q - P = 3X^2 + X = 3R + X \Rightarrow X = -P + 2Q - 3R \text{ d'où la colonne 2 de } M^{-1}$$

Enfin, on isole la constante dans Q et on exploite les relations précédentes :

$$1 = Q - 2X - X^2 = Q - 2(-P + 2Q - 3R) - R = 2P - 3Q + 5R \text{ d'où la colonne 1 de } M^{-1}$$