PT : TD n° 2 sur Chap 0 : Révision d'algèbre linéaire

Démontrer une équivalence ou une implication

- Une proposition écrite en « Si `PropositionA` alors `PropositionB` »
  se traduit par une implication logique : `PropositionA` ⇒ `PropositionB`
  On dit alors que : la `PropositionA` est <u>une condition suffisante</u> pour obtenir la `PropositionB`
  ou que : la `PropositionB` est <u>une condition nécessaire</u> pour la `PropositionA`
  Pour la démontrer, on suppose vraie la `PropositionA` et on démontre qu'alors la `PropositionB` est vraie.
  Je vous conseille, dans un premier temps, de respecter un schéma de preuve en :
  <u>Je sais</u> `PropositionA` en explicitant, en langage mathématique, les définitions et symboles utilisés dans la proposition
  <u>Je veux</u> `PropositionB` en explicitant, en langage mathématique, les définitions et symboles utilisés dans la proposition
  <u>Je prouve</u> où on explicite le raisonnement logique conduisant à obtenir la véracité de la `PropositionB` à l'aide de la `PropositionA`
- Une proposition écrite en « `PropositionA` si et seulement si `PropositionB` »
  se traduit par une équivalence logique : `PropositionA` ⇔ `PropositionB`
  On dit alors que : la `PropositionA` est <u>une condition nécessaire et suffisante</u> pour la `PropositionB` (et réciproquement). Pour démontrer une équivalence, on procède, en général, en deux temps en démontrant les deux implications ⇒ et ⇒

EXEMPLE N° 4 Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence :

$$\ker f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg} f$$

On prouve cette équivalence par double implication.

(⇒) <u>On sait</u> que $\ker f = \operatorname{Im} f$ <u>On veut</u> que : 1) $f^2 = 0$ càd $\forall x \in E,\ f^2(x) = 0$ et 2) $n = 2\operatorname{rg}(f)$

<u>On prouve</u> : $\forall x \in E,\ f^2(x) = f(f(x))$ or $f(x) \in \operatorname{Im} f = \ker f$ d'où $f(f(x)) = 0$ et donc $f^2 = 0$.

De plus, par le théorème du rang, on sait : $n = \dim\ker f + \operatorname{rg} f = 2\operatorname{rg} f$ car $\dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f$.

(⇐) <u>On sait</u> que : 1) $f^2 = 0$ càd $\forall x \in E,\ f^2(x) = 0$ et 2) $n = 2\operatorname{rg}(f)$ <u>On veut</u> que $\ker f = \operatorname{Im} f$

<u>On prouve</u> : Puisqu'on veut prouver une égalité de sev, il suffit d'établir que :
- les deux sev ont la même dimension - il y a une inclusion entre les deux sev

Le théorème du rang conduit à : $n = \dim\ker f + \operatorname{rg} f$

donc, avec 2) : $2\operatorname{rg} f = \dim\ker f + \operatorname{rg} f \Leftrightarrow \dim\ker f = \dim\operatorname{Im} f$.

D'autre part : $\forall y \in \operatorname{Im} f, \exists x \in E,\ y = f(x)$ d'où $f(y) = f^2(x) = 0$ soit $y \in \ker f$. Ainsi, $\operatorname{Im} f \subset \ker f$.

EXEMPLE N° 5 Donner le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et des produits de ces matrices.

- On note C_j la colonne j de la matrice A et A est associée canoniquement à une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

On a : $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1)$ car $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = 3C_1$ ainsi : $\boxed{\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}((1,1)) = \operatorname{Im} A}$

et donc $\operatorname{rg}(A) = 1$ de sorte que, par le théorème du rang : $\dim\operatorname{Ker} A = \dim\mathbb{R}^3 - \operatorname{rg}(A) = 2$

On cherche alors deux vecteurs non colinéaires dans Ker A pour en obtenir une base :

$$2C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2,-1,0) \in \operatorname{Ker} A \text{ et, de même : } (3,0,-1) \in \operatorname{Ker} A \text{ car } 3C_1 - C_3 = 0$$

Les deux vecteurs étant non colinéaire, on a : $\boxed{\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}\big((2,-1,0),(3,0,-1)\big)}$

- B est associée canoniquement à $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et, les deux colonnes de B étant non colinéaires, on a : $\boxed{\operatorname{Im} B = \operatorname{Vect}\big((1,-1,0),(0,-1,1)\big)}$ et le rang de B vaut 2.

Par le théorème du rang : $\dim\operatorname{Ker} B = \dim\mathbb{R}^2 - \operatorname{rg}(B) = 2 - 2 = 0$ donc $\boxed{\operatorname{Ker} B = \{(0,0)\}}$

- $C = AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ associée canoniquement à $h = f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. On note C_j la colonne j de C.

$\operatorname{Im} C = \operatorname{Vect}(C_1, C_2) = \operatorname{Vect}(C_2) \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{Im} C = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big)}$ et $\operatorname{rg}(C) = 1$

Par le théorème du rang : $\dim\operatorname{Ker} C = \dim\mathbb{R}^2 - \operatorname{rg}(C) = 2 - 1 = 1$ et il suffit de trouver un seul vecteur non nul du noyau pour en obtenir une base. Or : $C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aussi : $\boxed{\operatorname{Ker} C = \operatorname{Vect}\big((1,1)\big) = \operatorname{Im} C}$

- $D = BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est associée canoniquement à $u = g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. On note C_j la colonne j de D.

On remarque que : $C_2 = 2C_1$ et $C_3 = 3C_1$ donc $\operatorname{Im} D = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1) = \boxed{\operatorname{Vect}((1,-2,1)) = \operatorname{Im} A}$

Alors $\operatorname{rg}(A) = 1$ et, par le théorème du rang : $\dim\operatorname{Ker} A = \dim\mathbb{R}^3 - \operatorname{rg}(A) = 2$

On obtient une base de Ker A en trouvant deux vecteurs non colinéaires dans Ker A or :

$$2C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\text{et}\quad 3C_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad\text{aussi}\quad \boxed{\operatorname{Ker} D = \operatorname{Vect}\big((2,-1,0),(3,0,-1)\big)}$$

EXEMPLE N° 7 Préciser le noyau et l'image des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que

f vérifie $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P(1) - P(1)X + P(-1)X^2 - P(-1)X^3$

g est canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- On vérifie que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$: f est linéaire (à faire) et $f(1) = 1 - X + X^2 - X^3$, $f(X) = 1 - X - X^2 + X^3$, $f(X^2) = 1 - X + X^2 - X^3$ et $f(X^3) = 1 - X - X^2 + X^3$ sont tous dans $\mathbb{R}_3[X]$

La matrice canoniquement associée à f est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dont on note C_j la colonne j

On sait que : $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$ car $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$

Comme C_1 et C_2 sont non colinéaires, $\operatorname{rg}(A) = 2$ et (C_1, C_2) base de Im A

De plus : $C_1 = C_3 \Leftrightarrow f(1) = f(X^2) \Leftrightarrow f(1 - X^2) = 0$ OU BIEN $C_1 - C_3 = 0 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1,0,-1,0) \in \operatorname{Ker} A$

De même : $f(X - X^3) = 0$ OU $(0,1,0,-1) \in \operatorname{Ker} A$

Finalement : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\underbrace{1 - X + X^2 - X^3}_{P_1}, \underbrace{1 - X - X^2 + X^3}_{P_2})$ est de dimension 2 et $(\underbrace{1 - X}_{1/2(P_1+P_2)}, \underbrace{X^2 - X^3}_{1/2(P_1-P_2)})$

Par le théorème du rang, Ker f est de dimension $\dim\mathbb{R}_3[X] - \operatorname{rg} f = 4 - 2 = 2$ et la famille $(1 - X^2, 1 - X^3)$ est une famille libre (car à degrés échelonnés) de deux vecteurs de Ker f donc c'est une base de Ker f

- Pas de relation "simple" sur les colonnes. On utilise le noyau :

$$(x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ -x + y - z + t = 0 \\ x + 2y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ -y + 3z - 2t = 0 \\ 2y - 2z + 2t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z - t = 0 \\ z + 3z - 2(2z) = 0 \\ t = z - y = 2z \\ y = -z \end{cases}$$

soit $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}((0,-1,1,2))$ puis $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(2X^3 + X^2 - X)$

Par le théorème du rang, $\dim\operatorname{Im} f = \dim\operatorname{Im} A = 4 - \dim\operatorname{Ker} A = 3$ On cherche donc une famille libre constituée de 3 colonnes de la matrice qui sera une base de Im A.

En notant C_j la colonne j de la matrice, $(C_1 - C_2 - C_3, C_3, C_4) = \big((0,1,-1,-1),(1,-1,-1,0),(0,1,1,1)\big)$ car :

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3,\quad \alpha(C_1 - C_2 - C_3) + \beta C_3 + \gamma C_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \\ \gamma = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Une base de Im f est donc $\big(X - X^2 - X^3, 1 - X - X^2, X + X^2 + X^3\big)$

EXEMPLE N° 7 On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Quel est le degré de $f(1,1,0)$?

Matriciellement : $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow f(1,1,0) = 5\times 1 + 0\times X + 0\times X^2 = 5$ est le polynôme constant à 5 de degré 0

Attention au SENS de ce que vous écrivez !

OU BIEN : $f(1,1,0) = f(1,0,0) + f(0,1,0) = (3+X+2X^2) + (2-X-2X^2) = 5$

2. Justifier que f est un isomorphisme en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.

f est un isomorphisme si la matrice A est inversible. On utilise l'algorithme du pivot de Gauss :

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{}$$

$$I_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/5 & 1 & -4/5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 1/5 \\ 1/5 & 1 & -4/5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

3. On admet que $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0$ Retrouver d'une autre façon que f est un isomorphisme.

On cherche toujours à obtenir que A est une matrice inversible mais on utilise cette fois les équivalences :

$A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n \Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n$

Pour cela, on isole la matrice identité : $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0 \Leftrightarrow 5I_3 = A^3 - 3A^2 + A \Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{5}(A^2 - 3A + I_3)\times A$

d'où A inversible et $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 - 3A + I_3)$ *Attention à l'erreur classique de SENS : $A = I_3 \times A$ et pas $1 \times A$*

4. Quel est antécédent du polynôme $1 + 2X + 3X^2$ par f ?

$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}$ soit $f^{-1}(1+2X+3X^2) = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, 1)$

EXEMPLE N° 8 On définit f sur $M_2(\mathbb{R})$ par $f(A) = (a+b)X^2 + (b+c)X + (c+d)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

et également $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], M_2(\mathbb{R}))$ canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. (a) On admet que f est linéaire. Rappeler ce que cela signifie.

Ici : $f \in \mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X])$ s'écrit $\forall (A,B) \in M_2(\mathbb{R})^2, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ f(\alpha A + B) = \alpha f(A) + f(B)$

Le choix des notations est libre mais c'est quand même plus clair quand on les choisit bien...

(b) Préciser Ker f. En déduire que f est surjective non injective.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (a+b)X^2 + (b+c)X + (c+d) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=-b=a \\ d=-c=-a \end{cases}$ donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$

f n'est pas injective puisque $\dim \operatorname{Ker} f = 1 \neq 0$.

Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker} f = 4 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ or $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_2[X]$ donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_2[X]$ et on peut donc conclure que f est surjective.

(c) Donner la matrice canoniquement associée à f.

Méthode 1 : Par définition, la matrice cherchée est

$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{C}_{can}}(f) = \operatorname{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22})\right)$ où $\mathscr{B}_{can} = \left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right)$ est la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}_{can} = (1, X, X^2)$ celle de $\mathbb{R}_2[X]$.

On calcule : $\begin{cases} f(E_{11}) = X^2 \\ f(E_{12}) = X^2 + X \\ f(E_{21}) = X + 1 \\ f(E_{22}) = 1 \end{cases}$ donc la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Méthode 2 : On utilise l'écriture matricielle. Puisque $f \in \mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X])$, la matrice M cherchée aura 4 colonnes et 3 lignes. La relation vectorielle $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (c+d) + (b+c)X + (a+b)X^2$ s'écrit matriciellement sous la forme $MX = Y$ où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} c+d \\ b+c \\ a+b \end{pmatrix}$ donnant : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ b+c \\ a+b \end{pmatrix}$

2. Justifier que g est injective non surjective.

On sait que $\operatorname{rg}(g) = \operatorname{rg} B = \dim \operatorname{Im} B = \dim \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ où C_i est la ième colonne de B.

Aussi : $\operatorname{rg}(g) \leqslant 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(g) \neq 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{Im}(g) \neq M_2(\mathbb{R})$ et g n'est pas surjective.

On vérifie facilement l'indépendance linéaire de C_1, C_2 et C_3 justifiant que $\operatorname{rg}(g) = 3$:

$\forall (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} g = \dim \mathbb{R}_2[X] - \operatorname{rg} g = 3 - 3 = 0$ et donc $\operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et g est injective.

3. Préciser la matrice canoniquement associée à $g \circ f$ et l'image par $g \circ f$ de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Puisqu'on connaît les matrices de g et f, on obtient la matrice de la composée par produit :

$g \circ f$ canoniquement associée à $B \times A = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(g \circ f)(M)$ de coordonnées $BA\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+d \\ -a+c \\ b+c \\ -a-b+c+d \end{pmatrix}$ donc $g \circ f(M) = \begin{pmatrix} c+d & -a+c \\ b+c & -a-b+c+d \end{pmatrix}$

4. Prouver que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$ puis que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow \begin{cases} c+d=0 \\ -a+c=0 \\ b+c=0 \\ -a-b+c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-c \\ a=c \\ b=-c \\ -c+c+c-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} c & -c \\ c & -c \end{pmatrix} \Leftrightarrow M \in \operatorname{Ker} f$

Le raisonnement précédent mené par équivalence prouve l'égalité : $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f$

Par le théorème du rang : $\dim \operatorname{Im}(g \circ f) = \dim M_2(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker}(g \circ f) = 4 - 1 = 3 = \dim \operatorname{Im} f$

et l'inclusion $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$ est clair puisque $\forall A \in M_2(\mathbb{R}),\ g \circ f(A) = g\big(f(A)\big) \in \operatorname{Im} g$

d'où l'égalité $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$ (même dimension et une inclusion)