PT : Correction du TD n° 1 sur le chapitre IX

EXEMPLE N° 4 On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on définit $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$

1. Justifier que $(E, \langle .,. \rangle)$ est un espace euclidien.

E est un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie donc il s'agit de vérifier que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire autrement dit que c'est une $\underbrace{\text{forme}}_{(1)}$ $\underbrace{\text{symétrique}}_{(2)}$ $\underbrace{\text{bilinéaire}}_{(3)}$ $\underbrace{\text{définie}}_{(5)}$ $\underbrace{\text{positive}}_{(4)}$.

(1) : Si P et Q sont dans E, on peut calculer les $n+1$ réels $P(k)Q(k)$ puis le réel $\langle P, Q\rangle$, somme finie de ces réels.

(2) : On a $\langle Q, P\rangle = \langle P, Q\rangle$ puisque le produit des réels est commutatif

(3) : Puisqu'on a la symétrie, il suffit de justifier l'une des linéarité soit, par exemple :

Pour $(P, Q_1, Q_2) \in E^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\langle P, \alpha Q_1 + Q_2\rangle = \alpha\langle P, Q_1\rangle + \langle P, Q_2\rangle$

Or : $\langle P, \alpha Q_1 + Q_2\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)\big(\alpha Q_1(k) + Q_2(k)\big) = \sum_{k=0}^{n}\big(\alpha P(k)Q_1(k) + P(k)Q_2(k)\big) = \alpha \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(k)Q_1(k)}_{=\langle P, Q_1\rangle} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(k)Q_2(k)}_{\langle P, Q\rangle_2}$

puisque les sommes sont finies (pas de pb d'existence)

(4) : Pour $P \in E$, $\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geqslant 0$ (car somme de nombres positifs).

(5) : On prouve : $\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0$

Si $\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0$ alors : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k)^2 = 0$ (somme nulle de réels positifs)

Ainsi, P possède $n+1$ racines distinctes (les $n+1$ entiers de $[\![0, n]\!]$) or $\deg P \leqslant n$ car $P \in E$ donc P a de façon certaine plus de racines que son degré ce qui implique que $P = 0$.

2. Dans cette question $n = 3$.

a. Démontrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid X(X-1) \text{ divise } P\}$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2 - 5X + 6)$ sont des sev orthogonaux.

Il s'agit de vérifier : a) F et G sont des sev de $E = \mathbb{R}_3[X]$ b) $\forall (P, Q) \in F \times Q$, $\langle P, Q\rangle = 0$

Pour a) : G est un sev de E car c'est un sev engendré (de dimension 1)

F est bien un sev de E car :

$P \in F \Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{R}_1[X]$, $P = X(X-1)R \Leftrightarrow P = X(X-1)(aX+b) = aX^2(X-1) + bX(X-1)$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Autrement dit : $F = \mathrm{Vect}\big(X^2(X-1), X(X-1)\big)$ est bien un sev de E

Remarque : $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ où (P_1, P_2) libre puisque de degré distincts donc (P_1, P_2) est une base de F et $\dim F = 2$

Pour b) : On a : $F \perp G \Leftrightarrow \forall P \in F, \forall Q \in G$, $\langle P, Q\rangle = 0$

Or : $P \in F \Rightarrow P(0) = P(1) = 0$ et $Q \in G \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$, $Q = \alpha(X^2 - 5X + 6) = \alpha(X-2)(X-3) \Rightarrow Q(2) = Q(3) = 0$

donc : $\langle P, Q\rangle = \underbrace{P(0)}_{=0}Q(0) + \underbrace{P(1)}_{=0}Q(1) + P(2)\underbrace{Q(2)}_{=0} + P(3)\underbrace{Q(3)}_{=0} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

Ainsi, F et G sont bien des sev orthogonaux.

Attention! On sait que $F \perp G \Rightarrow$ F et G sont en somme directe aussi : $F \oplus G \subset E$

mais $F \oplus G \neq E$ puisque $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 \neq 4 = \dim E$

b. Déterminer $F^\perp$

Par définition : $F^\perp = \big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \forall Q \in F,\ \langle P, Q\rangle = 0\big\}$ mais $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ où $P_1 = X^2(X-1)$ et $P_2 = X(X-1)$,

on sait aussi (caractérisation) : $F^\perp = \big\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \langle P, P_1\rangle = 0 = \langle P, P_2\rangle\big\}$ aussi :

$$
\begin{aligned}
P \in F^\perp &\Leftrightarrow \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ P = aX^3 + bX^2 + cX + d \text{ et } \begin{cases} 0 + 0 + P(2)P_1(2) + P(3)P_1(3) = 0 \\ 0 + 0 + P(2)P_2(2) + P(3)P_2(3) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \text{"} \qquad \text{et } \begin{cases} 4(8a + 4b + 2c + d) + 18(27a + 9b + 3c + d) = 0 \\ 2(8a + 4b + 2c + d) + 6(27a + 9b + 3c + d) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \text{"} \qquad \text{et } \begin{cases} 6(27a + 9b + 3c + d) = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ 2(8a + 4b + 2c + d) + 6(27a + 9b + 3c + d) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \text{"} \qquad \text{et } \begin{cases} 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \qquad \text{"} \qquad \text{et } \begin{cases} 19a + 5b + c = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ d = -8a - 4b - 2(-19a - 5b) = 30a + 6b \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ P = aX^3 + bX^2 + (-19a - 5b)X + 30a + 6b = a(X^3 - 19X + 30) + b(X^2 - 5X + 6)
\end{aligned}
$$

Ainsi : $F^\perp = \mathrm{Vect}\big(X^3 - 19X + 30, X^2 - 5X + 6\big)$

Remarque : Sans surprise, puisque $F \perp G$ où $G = \mathrm{Vect}(X^2 - 5X + 6)$, on retrouve $G \subset F^\perp$ mais l'inclusion est stricte.

3. On considère la famille des polynômes de Lagrange : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $L_i = \prod_{\substack{k \in [\![0, n]\!] \\ k \neq i}} \frac{X - k}{i - k}$

Justifier que $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de E

On remarque que : $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\deg(L_i) = n$ (produit de n monômes $\underbrace{\frac{1}{i-k}}_{\in\mathbb{R}}(X-k)$) et que : $L_i(k) = 0$ si $k \neq i$ et $L_i(i) = 1$

En effet, $X - k$ est un des facteurs de L_i donc k est bien racine de L_i et $L_i(i) = \prod_{\substack{k \in [\![0, n]\!] \\ k \neq i}} \frac{i-k}{i-k} = 1$

Aussi : $\forall (i, j) \in [\![0, n]\!]$, $\langle L_i, L_j\rangle = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} L_i(k)L_j(k)}_{\text{le seul terme éventuellement non nul est pour } k = i \text{ car sinon } L_i(k) = 0} = L_i(i) \times L_j(i) = 0$ car $j \neq i \Rightarrow L_j(i) = 0$ et : $\langle L_i, L_i\rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(k)^2 = L_i(i)^2 = 1$

La famille est donc orthogonales et constituée de vecteurs unitaires : elle est orthonormale.

On sait aussi que : $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ orthogonale $\Rightarrow (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ libre De plus : $\mathrm{Card}(L_0, L_1, \ldots, L_n) = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$

La famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est bien, par conséquent, une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et, puisqu'elle est orthonormée, c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

A RETENIR : on peut obtenir la liberté d'une famille en montrant qu'elle est orthogonale!

Les polynômes de Lagrange interviennent dans les problèmes d'interpolation :
on cherche une fonction f dont on connaît un certain nombre de valeurs : $f(0) = \alpha_0$, $f(1) = \alpha_1$, ..., $f(n) = \alpha_n$
La fonction polynômiale $P = \alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_n L_n$ est une solution de ce problème puisque :
$P(0) = \alpha_0 \times 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = \alpha_0$, $P(1) = 0 \times \alpha_1 \times 1 + 0 + \cdots + 0 = \alpha_1$, ..., $P(n) = 0 + 0 + \cdots + 0 + \alpha_n \times 1 = \alpha_n$