PT : Correction du TD nº 1 sur le chapitre VIII

EXERCICE Nº 1 On considère l'application f d'expression $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1. Justifier que f est une application continue sur son domaine de définition.

• <u>Domaine de définition</u> $f(x,y)$ existe lorsque $x^2+y^2>0$
Or, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2\geqslant 0$ et $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x^2=y^2=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0)$. Ainsi, f est définie sur $\mathrm{D}=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

• <u>Continuité sur D</u>
$[(x,y)\mapsto x^2]$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynômiale.

$\left\{\begin{array}{l} [(x,y)\mapsto x^2+y^2] \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \text{ car elle est polynômiale} \\ [t\mapsto\sqrt{t}] \text{ est continue sur } [0,+\infty[\\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\geqslant 0 \end{array}\right. \Rightarrow [(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}]$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition

Pour $(x,y)\in\mathrm{D}$, $\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$ aussi, par quotient, f est bien continue sur D

2. En utilisant les applications partielles de f déterminer l'unique valeur possible de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ en admettant que cette limite existe.

Si la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\ell$ existe alors c'est aussi la limite des applications partielles

$$\text{autrement dit } \lim_{x\to0} f(x,0)=\ell=\lim_{y\to0} f(0,y)$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x,0)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{x^2}{|x|}=|x-\xrightarrow[x\to0]{}0$ (et aussi, pour tout $y\in\mathbb{R}^*$, $f(0,y)=0\xrightarrow[y\to0]{}0$)

$$\boxed{\text{L'unique valeur possible pour cette limite est donc } 0}$$

3. On définit $f(0,0)=0$. Justifier que f est alors continue sur $\mathbb{R}^2$.

On sait déjà que f est continue sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ aussi il s'agit de justifier que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

<u>Méthode nº 1</u> On majore $\left|f(x,y)-f(0,0)\right|$ par une expression qui tend vers 0.

$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{x^2}{|x|}=|x|$ or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$

<u>Méthode nº 2</u> On passe en coordonnées polaire $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{r\to0} f(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$ (indépendamment de θ)

$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\dfrac{r^2\cos^2\theta}{r}=r\cos^2\theta$ aussi $\left|f(r\cos\theta,r\sin\theta)\right|\leqslant r\xrightarrow[r\to0]{}0$ indépendamment de θ

4. Étudier l'existence des dérivées partielles du premier ordre de f en $(0,0)$.

Il s'agit d'une étude ponctuelle de dérivabilité donc on utilise un taux d'accroissement.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe lorsque $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ admet une limite lorsque $x\to0$ or :
$\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\dfrac{|x|-0}{x}=\dfrac{|x|}{x}$ n'a pas de limite en 0 (car $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{|x|}{x}=-1\neq1=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}$). Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe lorsque $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ admet une limite lorsque $y\to0$ or :
$\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{x-0}=\dfrac{0-0}{x}=0\xrightarrow[y\to0]{}0$ donc $\dfrac{\partial f}{\mathrm{d}y}(0,0)$ existe et vaut 0

EXERCICE N° 2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\in\mathcal{U}=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

1. Justifier que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}^2$ en précisant la valeur de $f(0,0)$ adéquate.

Par les théorèmes usuels, f sera continue sur $\mathcal{U}$ où $x^2+y^2\neq 0$. Il s'agit donc de déterminer $f(0,0)$ pour que f soit continue en $(0,0)$.

• On commence par préciser la valeur $f(0,0)$: si f est C^0 en $(0,0)$, les applications partielles le seront aussi.
Or, pour $t\neq 0$: $f(t,0)=f(0,t)=0\xrightarrow[t\to 0]{}0$ donc $\boxed{\text{la seule valeur possible est } f(0,0)=0}$

• On justifie la continuité de f en $(0,0)$ en montrant que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=0$

Méthode 1 : $\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x||y|\dfrac{|x^2|+|y^2|}{|x^2+y^2|}=|x||y|\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=|x||y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

Méthode 2 : On passe en coordonnées polaires $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ avec $r\to 0$

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\cancel{r^2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\cancel{r^2}}\right|=r^2|\cos\theta|\times|\sin\theta|\times|\cos(2\theta)|\leqslant r^2\xrightarrow[r\to 0]{}0$$

Rappel : $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos(2\theta)$

Ainsi : f est continue sur $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et aussi en $(0,0)$ donc $\boxed{f \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}^2}$

2. La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ si
f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et que ces dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Vu que $f(y,x)=-f(x,y)$ l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ s'obtiennent à partir de l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et, lorsqu'elles existent, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$

Les théorèmes usuels s'appliquent aussi pour la classe C^1 et donnent ici que f est C^1 sur $\mathcal{U}=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ (quotient de deux fonctions polynômiales avec un dénominateur qui ne s'annule pas)

Il reste donc à étudier l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ (car en raison de la symétrie, elle impliquera celles de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$)

• Étudions l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$: $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0}=\dfrac{0-0}{t}=0\xrightarrow[t\to 0]{}0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0

• Étudions la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$:

$$\forall(x,y)\neq(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\Big(\underbrace{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}_{=y(x^4-y^4)}+\underbrace{2x^2y(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}_{4x^2y^3}\Big)$$

soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\dfrac{(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ aussi, en coordonnées polaires $(x,y)=\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)$ avec $r\to 0$

$$\left|\frac{\partial f}{dx}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\left|r\sin\theta\times\frac{\cancel{r^4}(\cos^4\theta-\sin^4\theta+4\cos^2\theta\sin^2\theta)}{\cancel{(r^2)^2}}\right|\leqslant r\underbrace{|\sin\theta|}_{\leqslant 1}\times\underbrace{(\cos^4\theta+\sin^4\theta+4\cos^2\theta\sin^2\theta)}_{\leqslant 1+1+4}\leqslant 6r\xrightarrow[r\to 0]{}0$$

OU BIEN (sans passer en coordonnées polaires) :

$$\left|\frac{\partial f}{dx}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|\leqslant|y|\frac{x^4+y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=|y|\frac{(x^2+y^2+2x^2y^2)+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\leqslant|y|\underbrace{\frac{(x^2+y^2)^2+2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}}_{\leqslant 1}\leqslant|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

Conclusion : f est donc bien C^1 en $(0,0)$ et donc, finalement, $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

3. Justifier l'existence et déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

La fonction f ainsi prolongée est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

On demande de déterminer des dérivées croisées ponctuellement en $(0,0)$.

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t-0}=\frac{t\times\dfrac{0-t^4+0}{(0+t^2)^2}-0}{t}=-1\xrightarrow[t\to 0]{}-1 \quad \text{donc } \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existe et vaut } -1}$$

On a vu, dans la question précédente que : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)=-x\dfrac{(y^4-x^4+4y^2x^2)}{(y^2+x^2)^2}$ aussi

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t-0}=\frac{-t\times\dfrac{0-t^4+0}{(0+t^2)^2}-0}{t}=1\xrightarrow[t\to 0]{}1 \quad \text{donc } \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ existe et vaut } 1}$$

Puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, le théorème de Schwarz assure donc que f n'est pas de classe C^2 en $(0,0)$ et donc $\boxed{f \text{ n'est pas de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

Par contre, les théorèmes usuels s'appliquent sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ et donnent f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$