EXERCICE N° 1 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Examinez $B+3I_3$

Pour la matrice A :

• On commence par calculer le polynôme caractéristique:

$$\chi_A(x)=\begin{vmatrix}x&-1&-2\\-1&x-1&-1\\-1&0&x+1\end{vmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{=}(x-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&x-1&-1\\-1&0&x+1\end{vmatrix}\underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1\\C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=}(x-2)\underbrace{\begin{vmatrix}1&0&0\\-1&x&0\\-1&1&x+2\end{vmatrix}}_{\text{déterminant triangulaire}}$$

d'où $\chi_A(x)=(x-2)x(x+2)$ et $\underline{\chi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]}$ (1), $Sp(A)=\{-2,0,2\}$ et $m(-2)=m(0)=m(2)=1$

Contrôle de sécurité: χ_A est bien unitaire de degré 3 et: $-2+0+2=0=tr(A)$

• On compare les multiplicités aux dimensions des sev propres:

Toutes les valeurs propres sont simples donc: $\underline{\forall\lambda\in Sp(A),\ \dim E_\lambda(A)=1=m(\lambda)}$ (2)

Dés lors: $\left\{\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{A \text{ est diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R})} \Leftrightarrow E_{-2}(A)\oplus E_0(A)\oplus E_2(A)=\mathbb{R}^3$

OU BIEN On peut utiliser la CS de diagonalisation

On a: χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X] \Rightarrow A$ est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$

• Diagonalisation de A: on cherche une base de chacun des sev propre de A qui sont tous de dimension 1

$\underline{\text{On cherche un vecteur } \varepsilon_1 \text{ dans } E_{-2}(A)=\text{Ker }(A+2I_3)} = \text{Ker}\begin{pmatrix}2&1&2\\1&3&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

On remarque $C_1=C_3$ autrement dit $\varepsilon_1=(1,0,-1)\in E_{-2}(A)$ or $\dim E_{-2}(A)=1$ donc $E_{-2}(A)=\text{Vect}(\varepsilon_1)$

$\underline{\text{On cherche un vecteur } \varepsilon_2 \text{ dans } E_0(A)=\text{Ker } A}$

Si on ne trouve pas une relation sur les colonnes, on se lance dans une résolution de système:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_0(A)=\text{Ker }A \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}y+2z=0\\x+y+z=0\\x-z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=z\\y=-2z\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Alors: $E_0(A)=\text{Vect}\big((1,-2,1)\big)$ et $\varepsilon_2=(1,-2,1)$ convient.

$\underline{\text{On cherche un vecteur } \varepsilon_3 \text{ dans } E_2(A)=\text{Ker }(A-2I_3)} = \text{Ker}\begin{pmatrix}-2&1&2\\1&-1&1\\1&0&-3\end{pmatrix}$

Si on ne trouve pas une relation sur les colonnes, on se lance dans une résolution de système:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_2(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-2x+y+2z=0\\x-y+z=0\\x-3z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}0=0\\y=4z\\x=3z\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$$

Alors: $E_2(A)=\text{Vect}\big((3,4,1)\big)$ et $\varepsilon_3=(3,4,1)$ convient.

On obtient la base de diagonalisation en concaténant les bases des sev propres: $\mathscr{B}_{diag}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$

La matrice de passage entre la base canonique $\mathscr{B}_{can}$ et la base de diagonalisation $\mathscr{B}_{diag}$ est: $\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-2&4\\-1&1&1\end{pmatrix}}$

La relation de changement de bases est $\boxed{P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}}$

$\boxed{\text{Pour la matrice B}}$:

• On commence par calculer le polynôme caractéristique. Ici, on dispose d'une indication.

Lorsque le sujet donne une indication, c'est qu'il essaie de vous aiguillez vers une méthode (sans doute la plus efficace)

Le sujet propose d'examiner $B + 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$B + 3I_3$ est clairement une matrice de rang 1 de sorte que $\dim \mathrm{Ker}\ (B + 3I_3) = 3 - 1 = 2$

Puisque $\dim \mathrm{Ker}\ (B + 3I_3) > 0$, on sait que -3 est une valeur propre de B et on sait aussi: $1 \leqslant \dim E_{-3}(B) \leqslant m(-3)$

On déduit donc que -3 est une racine d'ordre au moins 2 de χ_B. Si on note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres (complexes) de B, on peut affirmer que $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. On trouve λ_3 avec la trace:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}(B) \Leftrightarrow -6 + \lambda_3 = -6 \Leftrightarrow \lambda_3 = 0$$

Ainsi, le polynôme caractéristique de B est $\chi_B(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3) = x(x+3)^2$

OU BIEN on peut ignorer l'indication ou ne pas savoir comment l'utiliser

$$\chi_B(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & -1 \\ -1 & x+2 & -1 \\ -1 & -1 & x+2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} x \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 1 & -1 & x+2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}}{=} x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x+3 & 0 \\ -1 & 0 & x+3 \end{vmatrix}$$

Ce dernier déterminant est triangulaire (inférieur) donc: $\chi_B(x) = x(x+3)^2$

Finalement: $\underline{\chi_B(x) = x(x+3)^3 \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]}$ (i) et on a: $\mathrm{Sp}(B) = \{0, -3\}$ et $\begin{cases} m(0) = 1 \\ m(-3) = 2 \end{cases}$

• On compare les multiplicités aux dimensions des sev propres:

- Comme la valeur propre 0 est simple: $\underline{\dim E_0(B) = 1 = m(0)}$ (ii)

- On examine l'espace propre associé à -3: $E_{-3}(B) = \mathrm{Ker}\ (B + 3I_3)$ Tiens,tiens, on comprend mieux l'indication !

Or, la matrice $B + 3I_3$ est de rang 1 donc le théorème du rang donne $\underline{\dim E_{-3}(B) = 2 = m(-3) \quad \text{(iii)}}$

Ainsi: $\begin{cases} \text{(i)}: \chi_B(x) = x(x+3)^3 \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X] \\ \text{(ii) et (iii)} : \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(B),\ \dim E_\lambda(B) = m(\lambda) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\text{B est diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R})}$

La rédaction doit souligner le théorème utilisé: ici, c'est la CNS de diagonalisation utilisant le polynôme caractéristique.

• Puisqu'on sait que la matrice B est diagonalisable, on peut la diagonaliser.
Diagonaliser, c'est donner la matrice diagonale D mais aussi la matrice de passage P et la relation de changement de bases.
On connaît les dimensions des sous-espaces propres ce qui permet de savoir combien de vecteurs linéairement indépendant chercher pour obtenir une base:

$\dim E_0(B) = 1$ donc on cherche 1 vecteur dans $E_0(B) = \text{Ker } B$: $e_1 = (1,1,1)$ convient et $E_0(B) = \text{Vect}\Big((1,1,1)\Big)$ car

- soit on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = 0 \Leftrightarrow B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow (1,1,1) \in E_0(B)$ où C_i colonne i de B

- soit on revient à un système: $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\dim E_{-3}(B) = 2$ donc on cherche 2 vecteurs non colinéaires dans $E_{-3}(B) = \text{Ker } (B + 3I_3) = \text{Ker } \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$:

- soit on remarque que $\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 - C_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1,-1,0) \in E_{-3}(B) \\ (1,0,-1) \in E_{-3}(B) \end{cases}$ où C_i colonne i de B

- soit on revient à un système: $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

aussi $e_2 = (1,-1,0)$ et $e_3 = (1,0,-1)$ conviennent et $E_{-3}(B) = \text{Vect}\Big(e_2, e_3\Big)$

Finalement: $\boxed{P = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix} \text{ et } D = P^{-1}BP}$

Remarque: $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base de diagonalisation.

Pour les 5/2 et pour les autres plus tard : **diagonalisation de** B **via le theorème spectral**:

B est une matrice symétrique réelle donc $\boxed{\text{B est diagonalisable sur } M_3(\mathbb{R})}$
On sait aussi qu'on peut trouver une base de diagonalisation orthonormée càd une matrice de passage $P \in O_3(\mathbb{R})$
Cela signifie aussi que les sev propres de B sont orthogonaux.
$B + 3I_3$ est une matrice qui n'a que des 1 donc de rang 1 aussi $\dim \text{Ker } (B + 3I_3) = 3 - 1 = 2$
Autrement dit: $-3 \in \text{Sp}(B)$ et $\dim E_B(-3) = 2$ est un plan vectoriel.
Notons λ la troisième valeur propre (qui est réelle car on sait diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$) de B:
$\text{tr}(B) = -6 = 2 \times -3 + \lambda \Rightarrow \lambda = 0$ et donc $0 \in \text{Sp}(B)$ et c'est une valeur propre simple.
Finalement: $\chi_B(x) = x(x+3)^2$ avec $\begin{cases} \dim E_{-3}(B) = 2 \\ \dim E_0(B) = 1 \end{cases}$
On détermine l'un des sev propre: le plus simple est celui de dimension 1
$E_0(B) = \text{Ker } (B) = \cdots = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1,1,1)$
Dés lors: $E_{-3}(B) = E_0(B)^\perp$ est l'hyperplan d'équation $1 \times x + 1 \times y + 1 \times z = 0$. Le vecteur $e_2 = (1,0,-1)$ est donc dans $E_{-3}(B)$ car $1 + 0 - 1 = 0$.
On obtient un second vecteur: $e_3 = e_1 \wedge e_2 = (1,1,-2)$ (et on peut vérifier $1 + 1 - 2 = 0$, c'est magique !)
Conclusion: $(e_1, e_2, e_3) = \Big((1,1,1), (1,-1,0), (1,1,-2)\Big)$ est une base de diagonalisation orthogonale de B qu'on peut normaliser pour obtenir une base orthonormée: $\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \frac{e_3}{\|e_3\|}\right)$

$$\boxed{\text{soit } P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}) \text{ et } D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-3\end{pmatrix} \text{ alors } D = P^T BP}$$

$\boxed{\text{Pour la matrice C}}$:

• On commence par calculer le polynôme caractéristique:

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+1) = (x-1)(x-i)(x+i)$$

χ_C n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ donc $\boxed{\text{C n'est pas diagonalisable dans } M_n(\mathbb{R})}$

$\chi_C = (X-1)(X+i)(X-i)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ à racines simples donc $\boxed{\text{C est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{C})}$

Là encore, on répond à la question en mettant en évidence les résultats de cours utilisés !

• On diagonalise C dans $M_3(\mathbb{C})$: $^{(}C) = \{1, i, -i\}$ et tous les sev propres sont de dimension 1 donc on cherche pour chacun un seul vecteur pour obtenir une base.

- Espace propre $E_1(C)$ associé à 1 de dimension 1 : $C - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $(C-I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

- Espace propre $E_i(C)$ associé à i de dimension 1 : $C - iI_3 = \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$

on remarque $C_2 = iC_1$ où C_i colonne i de la matrice donc $(i, -1, 0) \in E_i(C)$ OU BIEN on résout le système

$$(C-I_3)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -ia - b + c = 0 \\ a - ib - c = 0 \\ (1-i)c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -ia \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}1\\-i\\0\end{pmatrix}$$

Alors: $E_1(C) = \mathrm{Vect}\big((1,0,1)\big)$, $E_i(C) = \mathrm{Vect}\big((1,-i,0)\big) = \mathrm{Vect}\big((i,-1,0)\big)$ et $E_{-i}(C) = E_{\bar{i}}(C) = \mathrm{Vect}\big(\overline{(1,-i,0)}\big) = \mathrm{Vect}\big((1,i,0)\big)$

Conclusion: $\big((1,0,1), (1,-i,0), (1,i,0)\big)$ est une base de diagonalisation de C dans $M_n(\mathbb{C})$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}), \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = P^{-1}CP}$$

EXEMPLE N° 3/2 Soit l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui à la suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ associe la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\begin{cases} v_0 = u_0 \\ \forall n \geqslant 1,\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} \end{cases}$. Déterminer les éléments propres de f

On cherche les réels λ tels qu'il existe une suite $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ non nulle avec
$f(u) = \lambda u \Leftrightarrow v = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \lambda u_n \Leftrightarrow u_0 = \lambda u_0$ et $\forall n \geqslant 1,\ \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n$

L'équation $u_0 = \lambda u_0 \Leftrightarrow (1-\lambda) u_0 = 0$ conduit soit à $\lambda = 1$ soit à $u_0 = 0$

si $u_0 = 0$ et $\lambda \neq 1$: on utilise ensuite la seconde relation $\left(\lambda \dfrac{1}{2}\right) u_n = u_{n-1}$

si $\lambda = \dfrac{1}{2}$ alors $\forall n \geqslant 1, u_{n-1} = 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n\geqslant 0} = (0)$ Absurde car $u \neq 0$

si $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$ alors (u_n) est une suite géométrique et la nullité de u_0 conduit à $(u_n)_{n\geqslant 0} = (0)$ Absurde car $u \neq 0$

On peut donc conclure, à ce stade, que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{1\}$

si $\lambda = 1$ alors on peut choisir u_0 non nul et on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2u_{n-1}$ donc $u_n = u_0 \times 2^n$

On peut donc dire que $\lambda = 1$ est une valeur propre avec $E_1(f) = \mathrm{Vect}\big((2^n)_{n\geqslant 0}\big)$

Finalement : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{1\}}$ et l'espace propre associé à $\lambda = 1$ est la droite vectorielle engendré par la suite $(2^n)_{n\geqslant 0}$

EXEMPLE N° 2 Déterminer, suivant les valeurs $\alpha \in \mathbb{R}$,les valeurs propres et la multiplicité pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$

Pour quelles valeurs du réel α, la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

$$\chi_M(x) = \det(xI_3 - M) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -\alpha \\ 0 & x-2 & \alpha \\ -1 & -1 & x-2+\alpha \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ -1 & x-2 & \alpha \\ 0 & -1 & x-2+\alpha \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } \chi_M \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x-2+\alpha \end{vmatrix} \underset{\text{dev selon } C_1}{=} (x-2) \times 1 \times \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x-2+\alpha \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)(x-2+\alpha)$$

$\boxed{\chi_M \text{ est scindé dans } M_3(\mathbb{R})}$ (1) et les racines sont $1, 2$ et $2-\alpha$.

1er cas : $\begin{cases} 2-\alpha \neq 1 \\ 2-\alpha \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ alors χ_M est scindé à racines simple.

2nd cas : $2-\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 0$ alors $\mathrm{Sp}(M) = \{1,2\}$ avec $\begin{cases} m(2) = 2 \\ m(1) = 1 \end{cases}$

3eme cas : $2-\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$ alors $\mathrm{Sp}(M) = \{1,2\}$ avec $\begin{cases} m(2) = 1 \\ m(1) = 2 \end{cases}$

On a vu que :

Cas n° 1 : Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, χ_M est scindé à racines simples donc M est diagonalisable

Cas n° 2 : Si $\alpha = 0$ alors $\chi_M = (X-2)^2(X-1)$. On examine $\dim \mathrm{Ker}\ (M - 2I_3) = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(A - 2I_3) = 1 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\ (A - 2I_3) = 3 - 1 = 2$ aussi $\begin{cases} \chi_M = (X-2)^2(X-1) \text{ est scindé} \\ \dim E_M(2) = m(2) \\ \dim E_M(1) = 1 = m(1) \ \text{(vp simple)} \end{cases} \Leftrightarrow$ M est diagonalisable

Cas n° 3 : Si $\alpha = 1$ alors $\chi_M = (X-2)(X-1)^2$. On examine $\dim \mathrm{Ker}\ (M - I_3) = \dim \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}(M - I_3) = 2 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\ (M - I_3) = 3 - 1 = 1$ aussi $\dim E_M(1) = 1 \neq m(1) \Rightarrow$ M n'est pas diagonalisable

Finalement : $\boxed{M \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \alpha \neq 1}$