Correction du TD nº 1 sur le chapitre V : Compléments sur les équations différentielles

EXERCICE Nº 1

1. Résoudre l'équation différentielle $ty' + |t|y = t^2e^{-|t|}$ sur $\mathbb{R}$

a. On résout sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}^*$ et: $ty' + |t|y = t^2e^{-|t|} \Leftrightarrow y' + \frac{|t|}{t}y = \frac{t^2}{|t|}e^{-|t|}$

b. Si $J =]0,+\infty[$: l'ensemble solution de $y' + y = 0$ est $\mathrm{Vect}(h_1)$ où $h_1(t) = e^{-t}$
On cherche une solution particulière y_0 avec $y_0(t) = C(t)h_1(t)$ où C dérivable sur J.

$y_0' + y_0 = te^{-t} \Leftrightarrow C'(t)h_1(t) = te^{-t} \Leftrightarrow C'(t) = t = \left(\frac{t^2}{2}\right)'$ d'où $y_0(t) = \frac{t^2}{2}e^{-t}$ convient.

Si $J =]-\infty,0[$: l'ensemble solution de $y' - y = 0$ est $\mathrm{Vect}(h_2)$ où $h_2(t) = e^t$
On cherche une solution particulière y_0 avec $y_0(t) = C(t)h_2(t)$ où C dérivable sur J.

$y_0' - y_0 = -te^t \Leftrightarrow C'(t)h_2(t) = te^t \Leftrightarrow C'(t) = t = \left(\frac{t^2}{2}\right)'$ d'où $y_0(t) = \frac{t^2}{2}e^t$ convient.

c. Une solution sur $]0,+\infty[$ de (E) a pour expression $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C\right)e^{-t}$ où $C \in \mathbb{R}$

Une solution sur $]-\infty,0[$ de (E) a pour expression $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + K\right)e^t$ où $K \in \mathbb{R}$

d. Recollement en 0:
Analyse: si y est une solution sur $\mathbb{R}$ alors

- c'est une solution sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ donc: $\exists (C,K) \in \mathbb{R}^2, y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t^2}{2} + C\right)e^{-t} & \text{si } t > 0 \\ \left(\frac{t^2}{2} + K\right)e^t & \text{si } t < 0 \end{cases}$
- y doit être continue et dérivable en 0 donc doit admettre un $DL_1(0)$ or:

$\left(\frac{t^2}{2} + C\right)e^{-t} = \left(\frac{t^2}{2} + C\right)(1 - t + o(t)) = C - Ct + o(t)$ et $\left(\frac{t^2}{2} + K\right)e^t = \left(\frac{t^2}{2} + K\right)(1 + t + o(t)) = K + Kt + o(t)$

Par unicité du DL, on a: $\begin{cases} C = K \\ -C = K \end{cases} \Leftrightarrow C = K = 0$ et alors y est bien C^0 et dérivable avec $y(0) = y'(0) = 0$

Synthèse: On définit y par $y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-|t|}$ pour tout t réel (càd $C = K = 0$)
D'après c. et avec le second point de l'analyse, on sait que y est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation pour $t > 0$, pour $t < 0$ et aussi pour $t = 0$ donc c'est une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

Conclusion: Il y a une unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ d'expression $y(t) = \frac{t^2}{2}e^{-|t|}$ pour tout t réel

2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} (1+t)^3y' + 2(1+t)^2y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ sur le plus grand intervalle I de $\mathbb{R}$ possible.

a. On résout sur $J =]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$ où: (E) $\Leftrightarrow y' + \frac{2}{1+t}y = \frac{1}{(1+t)^3}$

b. L'ensemble des solutions homogènes sur J est $\mathrm{Vect}(h)$ où $h(t) = e^{-A(t)} = \frac{1}{(1+t)^2}$ puisqu'une primitive de $a(t) = \frac{2}{1+t}$ sur J est $A(t) = 2\ln|1+t|$. On peut, parfois, être amené à « faire porter un signe sur la constante » à cette étape.
Par exemple l'équation $y' + \frac{1}{1+t}y = 0$ sur J, alors $h(t) = \frac{1}{|1+t|} = \frac{\pm 1}{1+t}$ car $1+t$ garde toujours un signe constant sur J.
Or: $\{[t \mapsto \frac{C}{1+t}] \mid C \in \mathbb{R}\} = \{[t \mapsto \frac{-K}{1+t}] \mid K \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}([t \mapsto \frac{1}{1+t}])$ donc on pourra utiliser plutôt $h(t) = \frac{1}{1+t}$

c. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(t) = C(t)h(t)$ avec C dérivable sur J
$y_0' + \frac{2}{1+t}y_0 = \frac{1}{(1+t)^3} \Leftrightarrow C'(t)h(t) = \frac{1}{(1+t)^3} \Leftrightarrow C'(t) = \frac{1}{1+t} = (\ln|1+t|)'$ et $y_0(t) = \frac{\ln|1+t|}{(1+t)^2}$ convient

d. Une solution $]-\infty,-1[$ a pour expression $y(t) = \frac{C + \ln|1+t|}{(1+t)^2}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Sur $]-1,+\infty[$, la condition initiale impose $y(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$ et donc: $y(t) = \frac{1 + \ln|1+t|}{(1+t)^2}$ si $t > -1$

e. Peut-on envisager un recollement en -1 ? En évaluant en $t = -1$ dans l'équation, on trouve $0 = 1$ (pour toutes les valeurs de $y(-1)$ et $y'(-1)$ qu'on pourrait imposer) aussi on ne peut pas avoir de solution sur un intervalle incluant -1

EXERCICE Nº 2 Résoudre l'équation différentielle (E_m) : $y'' - 2my' + (m^2+1)y = e^x \sin x$ où $m \in \mathbb{R}$ est fixé.

• Structure de l'ensemble des solutions:
On reconnaît une équation différentielle du second ordre non homogène résolue en y'' aussi la théorie s'applique et l'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = y_p + \mathrm{Vect}(h_1,h_2)$
où $\begin{cases} y_p \text{ est une solution particulière de (E) sur I} \\ h_1 \text{ et } h_2 \text{ sont des solutions homogènes non colinéaires} \end{cases}$

• Résolution de l'équation homogène: $y'' - 2my' + (m^2+1)y = 0$ est une EDL_2 à coefficients constants donc on peut utiliser l'équation caractéristique $r^2 - 2mr + (m^2+1) = 0$
Le discriminant est $\Delta = 4m^2 - 4(m^2+1) = -4 = (2i)^2$ donc les racines sont conjuguées $\frac{2m \pm 2i}{2} = m \pm i$
Les solutions homogènes ont pour expression $y(x) = e^{mx}(A\cos(x) + B\sin(x))$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$
Autrement dit: y est solution homogène $\Leftrightarrow y \in \mathrm{Vect}(h_1,h_2)$ où $\begin{cases} h_1(x) = e^{mx}\cos x \\ h_2(x) = e^{mx}\sin x \end{cases}$

• Recherche d'une solution particulière:
On remarque que le second membre est de la forme $e^x \sin x = \Im m\left(e^{(1+i)x}\right)$
aussi on obtient une solution particulière $y_p = \Im m(z_p)$ où z_p solution particulière de $z'' - 2mz' + (m^2+1)z = e^{(1+i)x}$

Il y a 2 cas à envisager selon que $(1+i)$ est racine ou pas de l'équation caractéristique:
Cas n°1 si $m \neq 1$ alors $1 + i \neq m \pm i$ n'est pas une racine et on cherche $z_p(x) = ke^{(1+i)x}$ avec $k \in \mathbb{C}$:
$z_p'' - 2mz_p' + (m^2+1)z_p = e^{(1+i)x} \Leftrightarrow k(1+i)^2e^{(1+i)x} - 2mk(1+i)e^{(1+i)x} + (m^2+1)ke^{(1+i)x} = 0$ en divisant par $e^{(1+i)x} \neq 0$

$\Leftrightarrow \left((1+i)^2 - 2m(1+i) + m^2 + 1\right)k = 1$ or $(1+i)^2 - 2m(1+i) + m^2 + 1 \neq 0$
puisque $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{(m-1)^2 + 2i(1-m)} = \frac{1}{m-1} \times \frac{1}{(m-1) - 2i} = \frac{1}{m-1} \times \frac{m-1+2i}{(m-1)^2+4}$

On retrouve la condition nécessaire $m - 1 \neq 0$!

Et: $y_p(x) = \Im m(z_p(x)) = \Im m\left(\frac{1}{m-1} \times \frac{m-1+2i}{(m-1)^2+4}e^xe^{ix}\right)$ car $z_p(x) = ke^{(1+i)x} = ke^xe^{ix}$

$= \frac{e^x}{(m-1)\left((m-1)^2+4\right)}\Im m\left(((m-1)+2i)e^{ix}\right)$ (les constantes réelles sortent de la partie imaginaire)

$= \frac{e^x}{(m-1)\left((m-1)^2+4\right)}\left((m-1)\sin x + 2\cos x\right)$

Finalement, l'expression d'une solution s'écrit

$$\boxed{\text{Si } m \neq 1 \text{: } \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{mx}(A\cos(x) + B\sin(x)) + \frac{e^x}{(m-1)\left((m-1)^2+4\right)}\left((m-1)\sin x + 2\cos x\right)}$$

Cas n°2 si $m = 1$ alors $1 + i$ est une racine simple et on cherche $z_p(x) = kxe^{(1+i)x}$ avec $k \in \mathbb{C}$:
Astuce de calcul: si P est un polynôme, $(P(x)e^{mx})' = (P'(x) + mP(x))e^{mx}$

$z_p(x) = kxe^{(1+i)x}$ $(\times 2)$ $z_p'(x) = k\left(1 + (1+i)x\right)e^{(1+i)x}$ $(\times -2)$

$z_p''(x) = k\left(2(1+i) + (1+i)^2x\right)e^{(1+i)x} = k(2(1+i) + 2ix)e^{(1+i)x}$ $(\times 1)$

Les coefficients entre parenthèses après les dérivées correspondent aux coefficients de l'équation si $m = 1$

Ne pas oubliez de simplifier les coefficients de l'équation puisque $m = 1$!

$z_p'' - 2z_p' + 2z_p = e^{(1+i)x} \Leftrightarrow_{e^{(1+i)x} \neq 0} \left(2ix + 2(1+i) - 2 - 2(1+i)x + 2x\right)k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$

Astuce de calcul: je factorise par $ke^{(1+i)x}$ présent dans toutes les dérivées. L'exponentielle se simplifiant avec le second membre.

puis: $y_p(x) = \Im m(z_p(x)) = \Im m\left(\frac{-i}{2}xe^xe^{ix}\right) = -\frac{xe^x}{2}\Im m\left(ie^{ix}\right) = -\frac{xe^x}{2}(\cos x)$

Finalement, l'expression d'une solution s'écrit

$$\boxed{\text{Si } m = 1 \text{: } \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) - \frac{xe^x}{2}(\cos x)}$$