Correction du TD nº 1 sur le chapitre IV : Rappels géométrie plane PTSI

EXERCICE Nº 1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et m est un réel non nul.
On introduit les points $A(m,0)$ et $B(3m;0)$ et le cercle $\mathscr{C}_1$ d'équation $x^2+y^2-2mx=0$

1. *Tangentes à un cercle en un point extérieur*

a. Donner le centre et le rayon R_1 de $\mathscr{C}_1$. Vérifier que B est un point situé à l'extérieur de $\mathscr{C}_1$.

$\mathscr{C}_1 : (x-m)^2+y^2=m^2$ donc $\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ est le cercle de centre A et de rayon } R_1=|m|}$ **N'oublier pas la valeur absolue !**
Comme $AB=\sqrt{(3m-m)^2}=\sqrt{2}|m|>|m|=R_1$, on peut conclure que $\boxed{\text{B est bien extérieur à } \mathscr{C}_1}$

b. Δ_p est la droite de pente $p\in\mathbb{R}$ qui passe par B et Δ_∞ la droite verticale qui passe par B.

i. Prouver que B est la projection orthogonale de A sur Δ_∞. En déduire que Δ_∞ ne rencontre pas $\mathscr{C}_1$.

Le projeté orthogonal de A sur Δ_∞ est le point d'intersection de Δ_∞ avec la normale issue de A à Δ_∞.
Ici, on nous donne H = B aussi, on gagne du temps en vérifiant que B est bien ce projeté H sans avoir à refaire la méthodologie de recherche d'un projeté dans sa généralité.
Pour vérifier que B est ce projeté, il suffit de vérifier que $B\in\Delta_\infty$ (clair par définition) et, d'autre part, que les droites (AB) et Δ_∞ sont orthogonales. Pour cela, on vérifie que les vecteurs directeurs le sont
soit $\overrightarrow{AB}.\vec{j}=0$ or: $\overrightarrow{AB}.\vec{j}=\begin{pmatrix}2m\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0$
Ainsi: $\boxed{\text{B est bien la projection orthogonale de A sur } \Delta_\infty}$.
Par suite, $d(A,\Delta_\infty)=AB=\sqrt{2}|m|>R_1$ et donc $\boxed{\Delta_\infty \text{ ne rencontre pas } \mathscr{C}_1}$

ii. Déterminer le projeté H_p de A sur Δ_p lorsque p est un réel puis la distance de A à Δ_p.

Si p est la pente de Δ_p alors la droite Δ_p est dirigée par $\vec{u}_p\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}$ soit: $\Delta_p=B+\text{Vect}(\vec{u}_p)$
aussi, puisque $H_p\in\Delta_p$: $\exists t\in\mathbb{R},\ H_p(3m+t,pt)$ Par ailleurs:
$\overrightarrow{AH_p}.\vec{u}_p=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2m+t\\pt\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2m+t+p^2t=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{2m}{1+p^2}$ Ainsi: $\boxed{H_p\left(3m-\dfrac{2m}{1+p^2};\dfrac{-2mp}{1+p^2}\right)}$.
On sait alors que la distance de A à Δ_p est $d(A,\Delta_p)=AH_p$ or
$AH_p=\sqrt{\left(2m-\dfrac{2m}{1+p^2}\right)^2+\dfrac{(2mp)^2}{(1+p^2)^2}}=\sqrt{\dfrac{(2mp^2)^2+(2mp)^2}{(1+p^2)^2}}=\left|\dfrac{2mp}{1+p^2}\right|\sqrt{p^2+1}=\boxed{\dfrac{2|mp|}{\sqrt{1+p^2}}=d(A,\Delta_p)}$

iii. Déterminer alors les deux tangentes à $\mathscr{C}_1$ issue de B.

Puisque Δ_∞ ne rencontre pas $\mathscr{C}_1$, elle ne peut pas être une tangente à $\mathscr{C}_1$. Les tangentes à $\mathscr{C}_1$ issues de B sont donc parmi les droites Δ_p. Une telle droite sera tangente à $\mathscr{C}_1$ lorsque $d(A,\Delta_p)=R_1$.
$d(A,\Delta_p)=R_1 \Leftrightarrow \dfrac{4m^2p^2}{1+p^2}=m^2 \Leftrightarrow 4p^2=1+p^2 \Leftrightarrow p^2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow p=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
En conclusion, $\boxed{\text{les deux tangentes à } \mathscr{C}_1 \text{ issues de B sont les droites } \Delta_p \text{ avec } p=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

2. On considère le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre B et de rayon 3. Préciser, suivant la valeur de m, l'intersection $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$

On a: $\mathscr{C}_2 : (x-3m)^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow x^2+y^2-6m+9m^2-9=0$ aussi:

$$\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 : \begin{cases} x^2+y^2-2mx=0 \\ x^2+y^2-6mx+9m^2-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2mx=0 \\ 4mx = 9m^2-9 \end{cases}_{L_2 \leftarrow L_1 - L_2} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x(2m-x) \quad (L_1) \\ x = \dfrac{9(m^2-1)}{4m} \end{cases}$$

Or: $(L_1) \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{9(m^2-1)\big(8m^2-9(m^2-1)\big)}{16m^2} = \dfrac{9(1-m^2)(9-m^2)}{16m^2} = f(m)$

Étudions le signe de $f(m)$ pour $m \in \mathbb{R}^*$: f est paire et le signe est celui de $(1-m)(1+m)(9-m)(9-m)$. Sur $]0,+\infty[$, c'est celui de l'expression du second degré $(1-m)(9-m)$ puisque $(1+m)(9+m)>0$ dont les racines sont 1 et 3:

$$f(m)<0 \Leftrightarrow m<1 \text{ ou } m>3 \qquad f(m)=0 \Leftrightarrow m \in \{1,3\} \qquad \text{et} \qquad f(m)>0 \Leftrightarrow m \in]1,3[$$

On obtient, par parité, les cas suivants lorsque $m \in \mathbb{R}^*$:

$\boxed{\underline{\text{1er cas}}:\ m \in]-\infty,-3[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[}$ où $f(m)<0$ de sorte que (L_1) n'a pas de solution donc le système non plus et, par suite, $\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_2 \text{ ne se rencontrent pas}}$.

$\boxed{\underline{\text{2eme cas}}:\ m=\pm1 \text{ ou } m=\pm3}$ où $f(m)=0$ et (L_1) donne $y=0$ puis $x=\dfrac{9(1-m^2)}{4m}$ aussi il y a un unique point d'intersection de sorte que $\boxed{\text{les cercles } \mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_2 \text{ sont tangents.}}$

$\boxed{\underline{\text{3eme cas}}:\ m \in]-3,-1[\cup]1,3[}$ où $f(m)>0$ et (L_1) donne 2 ordonnées y qui conduisent à deux points d'intersection et $\boxed{\text{les deux cercles } \mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_2 \text{ sont sécants en deux points distincts.}}$

EXERCICE N° 2 Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé du plan, on considère la droite $\Delta : x=-2$ et le point F de coordonnées $(1,0)$. Déterminer une équation réduite et esquisser la conique $\mathscr{C}$ de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité $e=\frac{1}{2}$. Même question avec $e=2$.

Par définition : $M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow MF = e \times d(M,\Delta) = e \times MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur Δ

Par construction : $H(-2,y_H)$ car $H \in \Delta$ et Δ étant dirigée par $\vec{\jmath}$: $\overrightarrow{MH}.\vec{\jmath} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-2) \\ y-y_H \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - y_H = 0$

De ce fait : $M(x,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow MF^2 = e^2 \times MH^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2 = e^2 \times \big((x-(-2))^2+(y-y)^2\big) \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = e^2(x+2)^2$

<u>Cas $e=\frac{1}{2}$</u> : on sait que, dans ce cas, $\mathscr{C}$ est une ellipse. Retrouvons son équation réduite :

$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2 = \tfrac{1}{4}(x+2)^2 \Leftrightarrow 4(x^2-2x+1)+4y^2 = x^2+4x+4 &\Leftrightarrow 3x^2-12x+4y^2=0 \\ &\Leftrightarrow 3\underbrace{(x^2-4x)}_{=(x-2)^2-4}+4y^2=0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-2)^2+4y^2=12 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1\end{aligned}$$

Finalement, $\mathscr{C}$ est bien une ellipse de centre $\Omega(2,0)$, d'axes de symétrie $\Omega+\text{Vect}(\vec{\imath})$ et $\Omega+\text{Vect}(\vec{\jmath})$ et de demi-axes $a=2$ et $b=\sqrt{3}$

<u>Cas $e=2$</u> : on sait que, dans ce cas, $\mathscr{C}$ est une hyperbole. Retrouvons son équation réduite :

$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2 = 4(x+2)^2 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)+y^2 = 4x^2+16x+16 &\Leftrightarrow 3x^2+18x-y^2+15=0 \\ &\Leftrightarrow 3\underbrace{(x^2-6x)}_{=(x-3)^2-9}-y^2+15=0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-3)^2-y^2=12 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{2^2}-\frac{y^2}{(2\sqrt{3})^2}=1\end{aligned}$$

Finalement, $\mathscr{C}$ est bien une hyperbole de centre $\Omega(3,0)$, d'axes de symétrie $\Omega+\text{Vect}(\vec{\imath})$ et $\Omega+\text{Vect}(\vec{\jmath})$, de sommet $(1,0)$ et $(5,0)$, d'asymptotes $\Omega+\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ \pm2\sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$