

EXEMPLE 2 LE 1), LE 2) ET LE 3)

1. Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{e^n + (-1)^n \sqrt{n}}$

On cherche un équivalent de u_n pour éliminer la DVG et obtenir le signe lorsque n est grand.

Par croissance comparée : $(-1)^n \sqrt{n} = o(e^n)$ car $\left| \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{e^n} \right| = n^{\frac{1}{2}} e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors : $u_n = \frac{1}{e^n + o(e^n)} \sim \frac{1}{e^n}$ et $\frac{1}{e^n} > 0$ donc, par critère d'équivalence, $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{e^n}$ ont la même nature.

Or, $\sum \frac{1}{e^n} = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{e}$ avec $|q| < 1$ donc elle converge.

Ainsi, la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{e^n + (-1)^n \sqrt{n}}$ converge

2. Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}}$

On cherche un équivalent de u_n pour éliminer la DVG et obtenir le signe lorsque n est grand.

Pour cela, on utilise des DL₂(0) : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ avec $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Alors : $u_n = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$

Alors : $u_n \sim -\frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{n} < 0$ donc, par critère d'équivalence, les séries $\sum u_n$ et $\sum \left(-\frac{1}{n}\right)$ sont de même nature.

Or $\sum \left(-\frac{1}{n}\right) = -\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$ donc qui est divergente.

Ainsi, la série $\sum u_n$ où $u_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

3. Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

On cherche un équivalent de u_n pour éliminer la DVG et obtenir le signe lorsque n est grand.

On repère une puissance du type $b_n^{a_n}$ où la base b_n et l'exposant a_n bouge en même temps avec n : on sait qu'il faut alors passer en écriture exponentielle : $b_n^{a_n} = \exp(a_n \ln b_n)$

On a : $n^{1+\frac{1}{n}} = \exp\left((1+\frac{1}{n}) \ln n\right) = e^{\ln n} e^{\frac{\ln n}{n}}$

Or : $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (par croissance comparée) donc $e^{\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et, par suite : $n^{1+\frac{1}{n}} \sim e^{\ln n} \times 1 = n \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n}$

Alors : $\begin{cases} u_n \sim \frac{1}{n} > 0 \\ \sum \frac{1}{n} \text{ DV car de Riemann avec } \alpha = 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sum u_n \text{ DV}}$

EXEMPLE 3 Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} + \frac{e^{n-1}}{3^{n+1}}$

On écrit $u_n = v_n + w_n$ où $v_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ et $w_n = \frac{e^{n-1}}{4^{n+1}}$

• $v_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2} > 0$ donc, par équivalence, $\sum v_n$ de même nature que $\sum \frac{1}{n^2}$ qui CV car de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$

• $w_n = \frac{e^{n-1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{3e} \times \left(\frac{e}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{e}{3}$ avec $|q| < 1$ ($e \approx 2,7$) donc $\sum w_n$ CV

Ainsi, puisque $u_n = v_n + w_n$, alors par somme de séries convergentes, $\boxed{\sum u_n \text{ CV}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$

Calcul de la somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \frac{1}{3e} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = \frac{1}{3e} \times \frac{e}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{e}{3}} = \frac{1}{3(3-e)}$

Et : $v_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ et on reconnaît une somme télescopique donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{1+1} - 0 = \frac{1}{2}$

Ainsi : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3(3-e)}}$