PT : TD n° 1 sur le chapitre III: Nature et somme de séries (théorème PTSI, CVA, règle du o et de d'Alembert)

EXEMPLE N° 2 Déterminer la nature de la série de terme général

1) $u_n=\dfrac{1}{2^n+n}$ 2) $u_n=\sin\dfrac{1}{\sqrt n}-\tan\dfrac{1}{\sqrt n}$ 3) $u_n=\dfrac{\left(\operatorname{sh}\frac1n\right)^2}{\ln(n+1)-\ln n}$ 4) $u_n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

1): Il est clair que: $u_n>0$ et aussi $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc il n'y a pas de divergence grossière.

Méthode n° 1: On remarque que: $0<u_n\leqslant\dfrac{1}{2^n}$ on augmente une fraction si on diminue son dénominateur...

mais $\sum\dfrac{1}{2^n}=\sum\left(\dfrac12\right)^n$ est une série géométrique convergence car de raison $q=\dfrac12$ avec $|q|<1$

Ainsi: $\begin{cases}\forall n\in\mathbb N,\ 0<u_n\leqslant\dfrac{1}{2^n}\\ \sum\dfrac{1}{2^n}\text{ converge}\end{cases}\Rightarrow\boxed{\sum u_n\text{ converge}}$ par majoration.

L'inégalité $0<u_n\leqslant\dfrac1n$ est vraie...mais elle ne sert à rien car on majore alors par la série harmonique divergente donc on ne peut rien conclure pour $\sum u_n$ de cette façon.

Méthode n° 2: $n=o(2^n)$ par croissance comparée car $\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{n}{e^{n\ln 2}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$) donc: $2^n+n\sim 2^n$

Alors: $\begin{cases}u_n\sim\dfrac{1}{2^n}=\left(\dfrac12\right)^n\\ \frac{1}{2^n}>0\\ \sum\left(\dfrac12\right)^n\text{ CV car géométrique avec }|q|=\dfrac12<1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\sum u_n\text{ CV}}$ *avec le critère d'équivalence* (Facultatif si bien énoncé)

2): Ici, le signe constant n'est pas trivial

On a $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ par les limites usuelles vu que $\dfrac{1}{\sqrt n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et que sin et tan sont continues en 0

On peut éventuellement être tenté par les équivalents usuels: $\sin x\sim_0 x$ et $\tan x\sim_0 x$ avec $x=\dfrac{1}{\sqrt n}$

en envisageant séparément la convergence de $\sum\sin\dfrac{1}{\sqrt n}$ et $\sum\sin\dfrac{1}{\sqrt n}$: si l'une des deux est convergente, alors la nature de $\sum u_n$ sera la nature de l'autre série. Malheureusement ici, le critère d'équivalence entraîne que les deux séries ont la même nature que $\sum\dfrac{1}{\sqrt n}=\sum\dfrac{1}{n^{\frac12}}$ donc elles divergent puisqu'on reconnaît une série de Riemann avec $\alpha=\frac12\leqslant1$. On ne peut donc rien conclure...

L'insuffisance des équivalents usuels conduit à envisager d'utiliser un outil plus précis: les développements limités.

On cherche un équivalent à l'aide de développements limités $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$ et $\tan(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$

Avec $x=\dfrac{1}{\sqrt n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, on a: $u_n=\dfrac{1}{\sqrt n}-\dfrac{1}{6n^{\frac32}}-\left(\dfrac{1}{\sqrt n}+\dfrac{1}{3n^{\frac32}}\right)+o\left(\dfrac{1}{3n^{\frac32}}\right)=-\dfrac{1}{2n^{\frac32}}+o\left(\dfrac{1}{3n^{\frac32}}\right)\sim-\dfrac{1}{2n^{\frac32}}$

Outre l'équivalent, on obtient aussi l'argument « signe constant" »

Alors: $\begin{cases}u_n\sim-\dfrac{1}{2n^{\frac32}}\\ -\dfrac{1}{2n^{\frac32}}<0\text{ au vois de l'infini}\end{cases}\Rightarrow\sum u_n$ et $\sum-\dfrac{1}{2n^{\frac32}}=-\dfrac12\sum\dfrac{1}{n^{\frac32}}$ de même nature. Or, on reconnaît une série de Riemann convergente ($\alpha=\frac32>1$) donc $\boxed{\sum u_n\text{ CV}}$.

3) $u_n>0$ car $\ln(n+1)>\ln n$. La limite n'est pas triviale mais on repère des équivalents usuels !

On cherche un équivalent de u_n: $u_n=\dfrac{\left(\operatorname{sh}\frac1n\right)^n}{\ln\frac{n+1}{n}}=\dfrac{\left(\operatorname{sh}\frac1n\right)^n}{\ln\left(1+\frac1n\right)}$

$\begin{cases}\operatorname{sh}u\sim_0 u\\ u=\dfrac1n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\end{cases}\Rightarrow\operatorname{sh}\dfrac1n\sim\dfrac1n\Rightarrow\left(\operatorname{sh}\dfrac1n\right)^2\sim\dfrac{1}{n^2}$ et $\begin{cases}\ln(1+u)\sim_0 u\\ u=\dfrac1n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\end{cases}\Rightarrow\ln\left(1+\frac1n\right)\sim\frac1n$

Ainsi: $u_n\sim\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac1n}\sim\dfrac1n$ de sorte que: $\begin{cases}u_n\sim\frac1n\\ \frac1n>0\\ \sum\dfrac1n\text{ DV (Riemann avec }\alpha=1\leqslant1)\end{cases}\Rightarrow\boxed{\sum u_n\text{ DV}}$

4) On repère une expression en $u(x)^{v(x)}$ où base/exposant bouge en même temps donc on passe en écriture exponentielle

$u_n=\exp\left(n^2\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right)=\exp\left(-n^2\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right)=\exp\left(-n^2\ln\left(1+\dfrac1n\right)\right)$

On peut déjà dire que: $u_n>0$ et $-n^2\ln\left(1+\frac1n\right)\sim-n^2\times\dfrac1n\sim-n\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty\Rightarrow u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (en composant les limites)

ATTENTION à la sortie de route: on ne peut pas composer des équivalents...

Il faut donc utiliser un outil plus adaptée à la composition: le développement limité

$-n^2\ln\left(1+\frac1n\right)=-n^2\left(\dfrac1n-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)=-n+\frac12+o(1)\Rightarrow u_n=e^{-n+\frac12+o(1)}=e^{-n}\times e^{\frac12}\times e^{o(1)}=\sqrt e\times\left(\dfrac1e\right)^n\times e^{o(1)}\sim\sqrt e\times\left(\dfrac1e\right)^n\times1$

Le choix d'aller à l'ordre 2 pour le DL prend son origine dans la gestion du o: on ne connaît pas la limite de $o(n)=n\times\underbrace{\varepsilon(n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$ qui C'est une FI. Par contre, $o(1)=1\times\underbrace{\varepsilon(n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et donc $e^{o(1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ autrement dit $e^{o(1)}\sim1$!

Alors: $\begin{cases}u_n\sim\sqrt e\times\left(\dfrac1e\right)^n\\ u_n>0\\ \sum e\times\left(\dfrac1e\right)^n=e\sum\left(\dfrac1e\right)^n\text{ CV car géométrique avec }0<\dfrac1e<1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\sum u_n\text{ CV}}$

EXEMPLE N° 3 Justifier l'existence et calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ où $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt n}{\sqrt{n(n+1)}}+\dfrac{2^{n-1}}{e^{n+1}}$

On repère deux termes généraux de séries de référence: $u_n=v_n+w_n$ où

$v_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt n}{\sqrt{n(n+1)}}=\dfrac{\cancel{\sqrt{n+1}}}{\sqrt n\cancel{\sqrt{n+1}}}-\dfrac{\cancel{\sqrt n}}{\cancel{\sqrt n}\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt n}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $w_n=\dfrac{2^{n-1}}{e^{n+1}}=\left(\dfrac2e\right)^n\times\dfrac{1}{2e}$

- La série $\sum v_n$ est une série télescopique associé à la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt n}\right)_{n\geqslant1}$

méthode 1: on sait que la série télescopique et la suite associées ont la même nature ici convergente avec:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}v_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt k}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt1}-0=1$ en revenant aux sommes partielles

Merci Marjorie !

méthode 2: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt k}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt1}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ en revenant aux sommes partielles

Finalement, $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}v_n$ CV et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n=1$

- La série $\sum w_n$ est une série géométrique convergente car de raison $q=\dfrac2e$ avec $|q|<1$ avec: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2e}\left(\dfrac2e\right)^n=\dfrac{1}{2e}\times\underbrace{\dfrac2e}_{\text{1er terme}}\times\dfrac{1-0}{1-\frac2e}$

Rappel: somme d'une série géométrique=premier terme $\times\dfrac{1-raison^{nbdeterme}}{1-raison}$

donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}w_n$ CV et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}w_n=\dfrac{1}{\cancel2e}\times\dfrac{\cancel2}{e}\times\dfrac{1}{1-\frac2e}=\dfrac{1}{e(e-2)}$

Conclusion: $u_n=v_n+w_n$ et $\begin{cases}\sum v_n\text{ CV}\\ \sum w_n\text{ CV}\end{cases}\Rightarrow\displaystyle\sum_{n\geqslant1}u_n$ CV et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n+\sum_{n=1}^{+\infty}w_n=1+\dfrac{1}{e(e-2)}$

LEROY - PT Paul Constans

EXERCICE N° 2 Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où 1) $u_n=\dfrac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{i+n\sqrt{n}}$ 2) $u_n=\dfrac{x^n}{n+\ln n}$ où $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

3) $u_n=\dfrac{n^{2n}}{(2n)!}$ 4) $u_n=\dfrac{(n+i)^n}{3^n n!}$ 5) $u_n=\dfrac{(-1)^n d(n)}{n^3-2\operatorname{Arctan} n}$ où $d(n)$ est le nombre de diviseur de n

A retenir ! Lorsqu'on ne maîtrise pas le signe du terme général (en particulier terme complexe), on étudie la CVA

1. La série est à termes complexes donc on étudie la convergence absolue (CVA) :

$|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{(n\sqrt{n})^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+n^3}}$ donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ aussi la série ne diverge pas grossièrement et on peut poursuivre l'étude.

Attention ! On rappelle que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ n'est qu'une condition nécessaire mais n'est pas suffisante

En vérifiant que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ on élimine une façon de diverger mais il y a d'autre façon de diverger...

On remarque que : $|u_n|\sim\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ On rappelle que : $f\sim_a g>0\Rightarrow f^\alpha\sim g^\alpha$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$

et $\sum\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge absolument (Riemann avec $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$) donc $\boxed{\sum u_n \text{ CVA par critère d'équivalence}}$

2. A retenir ! Lorsque u_n comporte des produits, des puissances ou des factorielles, c'est un bon candidat pour utiliser la règle de d'Alembert.

On ne peut pas contrôler le signe de u_n car x est un réel éventuellement négatif aussi on étudie la convergence absolue.

Si $x=0$ alors la convergence est claire. Sinon $u_n\neq 0$ (donc on pourra faire le quotient de deux termes consécutifs) et on a

$|u_n|=\dfrac{|x|^n}{n+\ln n}\sim\dfrac{|x|^n}{n}>0$ car $\ln n=o(n)$ par croissance comparée puisque $\dfrac{\ln n}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Aussi : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\sim\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}\times\dfrac{n+1}{|x|}\sim|x|$ et, d'après la règle de d'Alembert :

$\boxed{\text{Si } |x|<1 \text{ alors } \sum u_n \text{ CVA}}$ $\boxed{\text{Si } |x|>1 \text{ alors } \sum u_n \text{ DVG}}$

Si $|x|=1$ ie $x=1$ (vu que $x\neq-1$) alors $u_n=\dfrac{1}{n+\ln n}\sim\dfrac{1}{n}>0$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ DV par critère d'équivalence si } x=1}$

La série étudiée ici est une série entière : l'étude de ces séries nous occupera sur un chapitre plus tard dans l'année et la règle de d'Alembert est un outil privilégié pour cela.

3. Le terme général semble être un bon candidat pour utiliser la règle de d'Alembert

$|u_n|=\dfrac{n^{2n}}{(2n)!}>0$ donc ne s'annule pas et : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\dfrac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\times\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$

Attention ! Pour écrire u_{n+1}, on remplace tous les n par $n+1$!

Pour obtenir $\dfrac{1}{u_n}$ lorsque u_n est une fraction, on multiplie par l'inverse.

A retenir ! Pour simplifier un quotient de d'Alembert, on regroupe les termes analogues

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\times\frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}}\times(n+1)^2=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}\times(n+1)^2=\underbrace{\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}}_{\sim\frac{n^2}{(2n)^2}\sim\frac{1}{4}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{4}}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$

Or : $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n}=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\exp\left(2n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^2$ puisque $2n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sim 2n\times\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$

Attention ! On ne compose pas les équivalents...mais on compose les limites !

Ainsi : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{e^2}{4}>1$ (car $e\simeq 2,7>2$) alors $\boxed{\sum u_n \text{ DVG par la règle de d'Alembert}}$

4. La série est à termes complexes donc on étudie la convergence absolue (CVA) : $|u_n|=\dfrac{|n+i|^n}{3^n n!}=\dfrac{(n^2+1)^{\frac{n}{2}}}{3^n n!}$

La forme de ce terme invite alors à l'utilisation de la règle de d'Alembert : $u_n\neq 0$ puisque $|u_n|>0$ et :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{((n+1)^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}{3^{n+1}(n+1)!}\times\frac{3^n n!}{(n^2+1)^{\frac{n}{2}}}=\frac{((n+1)^2+1)^{\frac{1}{2}}}{3}\times\frac{n!}{(n+1)!}\times\left(\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}=\underbrace{\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{3}\times\frac{1}{n+1}}_{\sim\frac{\sqrt{n^2}}{3n}\sim\frac{1}{3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{3}}\times\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

et : $\left(\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}=\exp\left(\dfrac{n}{2}\ln\left(1+\dfrac{2n+1}{n^2+1}\right)\right)$

A retenir ! Les équivalents usuels sont en $\ln(1+\ldots)$ aussi on « force le passage » : $\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+1}=1+\left(\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+1}-1\right)=1+\dfrac{2n+1}{n^2+1}$

4. Or : $\dfrac{2n+1}{n^2+1}\sim\dfrac{2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $\dfrac{n}{2}\ln\left(1+\dfrac{2n+1}{n^2+1}\right)\sim\dfrac{n}{2}\times\dfrac{2n+1}{n^2+1}\sim\dfrac{2n^2}{2n^2}\sim 1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

Attention à la rédaction pour éviter toute ambiguïté sur la composition d'équivalent

Alors, en composant les limites, on a : $\left(\dfrac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)^{\frac{n}{2}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$

puis : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{e}{3}<1$ car $e\simeq 2,7$ donc $\boxed{\sum u_n \text{ CVA par la règle de d'Alembert}}$

5. On commence par étudier la convergence absolue (CVA) : $n^3-2\operatorname{Arctan} n\geqslant n^3-\pi$ donc, pour $n\geqslant 1$: $n^3-2\operatorname{Arctan} n>0$

et : $|u_n|=\dfrac{d(n)}{n^3-2\operatorname{Arctan} n}>0$. On utilise une majoration car le nombre de diviseur $d(n)$ de n est inférieur à n :

$d(n)\leqslant n$ et $n^3-2\operatorname{Arctan} n\geqslant n^3-\pi$ aussi $|u_n|\leqslant\dfrac{n}{n^3-\pi}=v_n$ et, puisque $v_n\sim\dfrac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ alors $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et on élimine la DVG.

De plus : $v_n\sim\dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ CVA (Riemann avec $\alpha=2>1$) donc $\sum v_n$ CVA et, par majoration, $\sum|u_n|$ converge .

Ainsi, $\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument}}$

FIN DE L'EXEMPLE 3 DU COURS Préciser la nature de $\sum\dfrac{\cos n}{(-1)^n n^2+f(n)}$ où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec $f(\mathbb{R})\subset[-2,2]$

On pose $u_n=\dfrac{\cos n}{(-1)^n n^2+f(n)}$ dont on ne contrôle pas le signe de la série donc on étudie la convergence absolue.

$$|u_n|=\frac{|\cos n|}{|(-1)^n n^2+f(n)|}\leqslant\frac{1}{|(-1)^n n^2+f(n)|}=w_n$$

Il nous faut comparer $f(n)$ et $(-1)^n n^2$ pour obtenir plus d'information sur le dénominateur. D'après l'énoncé : $|f(n)|\leqslant 2$

donc $\dfrac{|f(n)|}{|(-1)^n n^2|}=\dfrac{|f(n)|}{n^2}\leqslant\dfrac{2}{n^2}$ mais $\dfrac{2}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc, par encadrement : $\dfrac{f(n)}{(-1)^n n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\Leftrightarrow f(n)=o\big((-1)^n n^2\big)$

Par suite : $(-1)^n n^2+f(n)\sim(-1)^n n^2\Rightarrow w_n\sim\dfrac{1}{|(-1)^n n^2|}=\dfrac{1}{n^2}$ Rappel : $a_n\sim b_n\Rightarrow|a_n|\sim|b_n|$

Alors : $w_n\sim\dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ CVA (Riemann avec $\alpha=2>1$) donc $\sum w_n$ CVA, puis par majoration, $\boxed{\sum u_n \text{ CVA}}$