

EXERCICE 1 On considère l'espace vectoriel $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on considère les sous-ensembles :

— F constitué des fonctions de E 1-périodique

une fonction f est 1-périodique si : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$

— G constitué des fonctions de E qui sont nulles sauf éventuellement sur un segment

Un segment de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[a, b]$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Une fonction g de G vérifie donc : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ avec $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$

On ne sait rien des valeurs de $g(x)$ sur $[a, b]$ mais on sait que g est C^0 (continue) sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$

— H constitué des fonctions polynômiales qui s'annule en 0

une fonction h de H a une expression polynômiale (càd $h(x)$ est un polynôme en x) avec $h(0) = 0$

Démontrer que F, G et H sont des sev de E qui sont en somme directe

On demande seulement de vérifier que $F \oplus G \oplus H = E$ pas $F \oplus G \oplus H = E$!

Il s'agit d'établir que : 1) F, G et H sont des sev de E 2) la somme $F + G + H$ est directe

Attention! On ne demande pas d'établir $F \oplus G \oplus H = E$ mais seulement que la somme est directe...Il n'y a pas à prouver : $F + G + H = E$ et on n'a d'ailleurs aucune certitude que $\supset$ soit vraie

Preuve de 1) :

— Par définition : F et G sont inclus dans E et H également puisqu'une fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$

— la fonction nulle $0_E = [x \mapsto 0]$ est dans chacun de ces sev :

- elle est bien 1-périodique car $\forall x \in \mathbb{R}, 0_E(x+1) = 0 = 0_E(x)$ donc $0_E \in F$

- elle est nulle partout donc $0_E \in G$

- elle est polynômiale (avec tous les coefficients nuls) et $0_E(0) = 0$ donc $0_E \in H$

— ces sev sont stables par combinaison linéaire. Réalisons la preuve pour G (à faire pour F et H) :

Pour F, il s'agit de vérifier : $\forall f_1 \in F, \forall f_2 \in F, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha f_1 + f_2 \in F$

On sait : a) $f_1 \in F \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_1(x+1) = f_1(x)$ et b) $f_2 \in F \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_2(x+1) = f_2(x)$

On veut : $f = \alpha f_1 + f_2 \in F \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$

On prouve : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = \alpha f_1(x+1) + f_2(x+1) \stackrel{\text{avec a) et b)}}{=} \alpha f_1(x) + f_2(x) = f(x)$

Pour G, il s'agit de vérifier : $\forall g_1 \in G, \forall g_2 \in G, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha g_1 + g_2 \in G$

On sait : a) $g_1 \in G$ soit g_1 est C^0 sur $\mathbb{R}$ et $\exists (a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $a_1 < b_1$ et : $\forall x \in \mathbb{R} - [a_1, b_1], g_1(x) = 0$

$\mathbb{R} - [a_1, b_1]$ signifie $\mathbb{R}$ privé de $[a_1, b_1]$ donc, si $x \in \mathbb{R} - [a_1, b_1]$ alors $x \in \mathbb{R}$ mais $x \notin [a_1, b_1]$

b) $g_2 \in G$ soit g_2 est C^0 sur $\mathbb{R}$ et $\exists (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $a_2 < b_2$ et : $\forall x \in \mathbb{R} - [a_2, b_2], g_2(x) = 0$

On veut : $g = \alpha g_1 + g_2 \in G$ soit g est C^0 sur $\mathbb{R}$ et $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et : $\forall x \in \mathbb{R} - [a, b], g(x) = 0$

On prouve : D'abord, $g = \alpha g_1 + g_2$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions continues.

Ensuite, on définit $a = \min(a_1, a_2)$ et $b = \max(b_1, b_2)$ alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et : pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x \notin [a, b]$

soit $x < a$ et : $x < a = \min(a_1, a_2) \leq a_1$ d'où $g_1(x) = 0$ et $x < a = \min(a_1, a_2) \leq a_2$ d'où $g_2(x) = 0$

soit $x > b$ et : $x > b = \max(b_1, b_2) \geq b_1$ d'où $g_1(x) = 0$ et $x > b = \max(b_1, b_2) \geq b_2$ d'où $g_2(x) = 0$

dans les deux cas : $g(x) = \alpha g_1(x) + g_2(x) = \alpha \times 0 + 0 = 0$ donc g est nulle sauf éventuellement sur $[a, b]$

Pour H, il s'agit de vérifier : $\forall h_1 \in H, \forall h_2 \in H, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha h_1 + h_2 \in H$

On sait : a) $h_1 \in H$ soit $h_1(x)$ est polynômiale avec $h_1(0) = 0$ b) $h_2 \in H$ soit $h_2(x)$ est polynômiale avec $h_2(0) = 0$

On veut : $h = \alpha h_1 + h_2 \in H$ soit $h(x)$ est polynômiale et $h(0) = 0$

On prouve : une CL d'expression polynomiale est polynômiale donc $h(x) = \alpha h_1(x) + h_2(x)$ est polynômiale
 $h(0) = \alpha h_1(0) + h_2(0) = \alpha \times 0 + 0 = 0$

Preuve de 2) : La somme est directe si $0_E = [x \mapsto 0]$ admet pour unique décomposition la décomposition triviale.

On se donne $(f, g, h) \in F \times G \times H$ avec $f + g + h = [x \mapsto 0] \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) + h(x) = 0$ (*)

On sait : a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$ b) g est continue et : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $g(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$

c) $h(x)$ est polynômiale et $h(0) = 0$

On veut : $f = g = h = 0_E$ soit $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) = h(x) = 0$

On prouve : Ici, l'argument est un peu plus difficile :

Pour obtenir $f = 0_E$, il suffit de montrer que f est nulle sur un segment d'amplitude 1

Pour obtenir $h = 0_E$, plusieurs pistes : infinité de racine, nullité des coefficients, polynôme constant à 0...

En prenant un peu de recul, on voit que les fonctions de F et de G sont bornées...propriété que ne possède pas un polynôme s'il n'est pas constant!

On remarque que :

- $f(\mathbb{R}) = f([0, 1])$ puisque f est 1 périodique mais, puisque f est C^0 sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée et donc f est bornée sur $\mathbb{R}$

- $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R} - [a, b], g(x) = 0$ et, puisque g est C^0 sur $[a, b]$, elle est bornée sur $[a, b]$. Ainsi, g est bornée sur $\mathbb{R}$ (car elle l'est en dehors et en dedans de $[a, b]$)

- h est polynômiale donc, si elle est non constante, h n'est pas bornée (car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |h(x)| = +\infty$)

Mais : $f + g + h = 0_E \Leftrightarrow h = -f - g$ de sorte que h est bornée sur $\mathbb{R}$. Cela entraîne donc que h est forcément constante. Mais comme $h(0) = 0$, on a en fait $h = [x \mapsto 0] = 0_E$

Par suite, l'égalité $f + g + h = 0_E$ devient $f = -g$. Cette fonction doit être 1 périodique et nulle en dehors de $[a, b]$ donc elle est, par exemple nulle sur $[b+1, b+2]$ d'amplitude 1 et on en déduit, par périodicité, que c'est forcément la fonction nulle : $f = 0_E$ puis $g = -f = 0_E$

EXERCICE 3 Cet exercice est un exercice de révision de PTSI. Il ne sera pas repris en classe.

Soit u un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ avec $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$

1. Montrer que : $\ker u^2 = \ker u$

On doit prouver l'égalité de 2 se voir : $F = G \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset G \\ G \subset F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases}$

L'inclusion : $\ker u \subset \ker u^2$ est triviale car :

$$\forall x \in E, x \in \ker u \Rightarrow u(x) = 0_E \Rightarrow u^2(x) = u(u(x)) = u(0_E) = 0_E \Rightarrow x \in \ker u^2$$

De plus, par le théorème du rang : $\dim \ker u = \dim E - \text{rg} u = \dim E - \text{rg}(u^2) = \dim \ker u^2$

$$\text{Alors : } \begin{cases} \ker u \subset \ker u^2 \\ \dim \ker u = \dim \ker(u^2) \end{cases} \Rightarrow \ker u = \ker(u^2)$$

2. En déduire que $\ker u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires.

Puisque $\dim E = n < +\infty$,

$$\ker u \text{ et } \text{Im } u \text{ sont supplémentaires c\`ad } \ker u \oplus \text{Im } u = E \Leftrightarrow \begin{cases} \dim \text{Im } u + \dim \ker u = \dim E & (i) \\ \text{Im } u \cap \ker u = \{0_E\} & (ii) \end{cases}$$

La première proposition (i) est triviale puisqu'on reconnaît le théorème du rang appliqué à $u \in \mathcal{L}(E)$.

Prouvons (ii) autrement dit : $\forall x \in \text{Im } u \cap \ker u, x = 0_E$

$$\text{On sait : } x \in \text{Im } u \Rightarrow \exists x' \in E, x = u(x') \text{ et } x \in \ker u \Leftrightarrow u(x) = 0_E \quad \text{On veut : } x = 0_E \\ \text{mais aussi } \text{rg}(u) = \text{rg}(u^2) \text{ et } \ker(u) = \ker(u^2)$$

Le « en déduire » souligne qu'on a toujours l'hypothèse du départ sur les rangs et cette hypothèse permet d'obtenir un résultat sur les noyaux prouvé en 1)

$$\text{Prouvons le : } u(x) = 0_E \Rightarrow \text{car } x = u(x') \text{ } u(u(x')) = u^2(x') = 0_E \Rightarrow x' \in \ker(u^2) \\ \text{or } \ker(u^2) = \ker(u) \text{ donc : } x' \in \ker(u^2) \Rightarrow x' \in \ker(u) \Rightarrow x = u(x') = 0_E$$

3. Étudier les réciproques.

On dresse un bilan des implications prouvées dans les questions 1) et 2)

Dans la question 1), on a prouvé : $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2) \Rightarrow \ker u = \ker u^2$

Dans la question 2), on a prouvé : $\ker u = \ker u^2 \Rightarrow \ker u \oplus \text{Im } u = E$

• Étudions la réciproque de : $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2) \Rightarrow \ker u = \ker u^2$

Si $\ker u = \ker u^2$ alors, par le théorème du rang, on a encore :

$$\text{rg}(u^2) = \dim E - \dim \ker(u^2) = \dim E - \dim \ker u = \text{rg} u$$

La réciproque est donc vraie et on a : $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2) \Leftrightarrow \ker u = \ker u^2$

• Étudions la réciproque de : $\ker u = \ker u^2 \Rightarrow \ker u \oplus \text{Im } u = E$

$$\text{Si on suppose } \ker u \text{ et } \text{Im } u \text{ supplémentaires, alors : } \begin{cases} \dim \text{Im } u + \dim \ker u = \dim E & (i) \\ \text{Im } u \cap \ker u = \{0_E\} & (ii) \end{cases} \quad (\text{c'est le « on sait »})$$

La propriété (i) ne donne pas de nouvelle information car elle est toujours vraie par le théorème du rang. C'est donc la proposition $\ker u \cap \text{Im } u = \{0_E\}$ qui va être utile.

A-t-on $\ker u = \ker(u^2)$? C'est le « on veut »

Reste à faire le « On prouve » L'inclusion $\ker u \subset \ker(u^2)$ est toujours vraie. Examinons l'autre inclusion : si $x \in \ker(u^2)$ alors $u^2(x) = 0_E$ mais alors $u(x) \in \text{Im } u \cap \ker u = \{0_E\}$ ($u(x)$ est bien une image et $u(u(x)) = 0_E$) donc $u(x) = 0_E \Rightarrow x \in \ker u$. L'autre inclusion est vraie. Ainsi, on a bien $\ker u = \ker(u^2)$

La réciproque est donc vraie et on a : $\ker u = \ker u^2 \Leftrightarrow \text{Im } u \oplus \ker u = E$

$$\text{En définitive, on peut conclure : } \boxed{\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2) \Leftrightarrow \ker u = \ker u^2 \Leftrightarrow \text{Im } u \oplus \ker u = E}$$