Des exos plus "simples" sur les sommes directes

Exercice 0.25 Dans $\mathbb{R}^4$, on définit : $F = \text{Vect}\big((1,0,0,0),(0,1,0,0)\big)$, $G = \text{Vect}\big((0,0,1,0)\big)$ et $G = \text{Vect}\big((0,0,0,1)\big)$

Justifier que $F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$

• F, G et H sont des sev de E car il s'agit de sev engendré dans $\mathbb{R}^4$

• Prouvons que la somme $F + G + H$ est directe en vérifiant que

$(0,0,0,0)$ admet une unique décomposition dans $F + G + H$ qui est triviale.

Si $(0,0,0,0) = x_F + x_G + x_H$ où $x_F \in F$, $x_G \in G$ et $x_H \in H$, on prouve que $x_F = x_G = x_H = (0,0,0,0)$

$x_F \in F \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, x_F = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) = (a,b,0,0)$

$x_G \in G \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R},\ x_G = (0,0,c,0)$

$x_H \in H \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{R},\ x_H = (0,0,0,d)$

Mais alors : $(0,0,0,0) = (a,b,0,0) + (0,0,c,0) + (0,0,0,d) = (a,b,c,d) \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$ et, par suite :

$$x_F = (0,0,0,0) = x_G = x_H$$

• On sait que : $\dim F = 2$ (car $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$ ne sont pas colinéaire

et que : $\dim G = 1 = \dim H$ aussi $\dim F \oplus G \oplus H = \dim F + \dim G + \dim H = 2 + 1 + 1 = 4$

Alors : $\begin{cases} F \oplus G \oplus H \subset \mathbb{R}^4 \\ \dim F \oplus G \oplus H = 4 = \dim \mathbb{R}^4 \end{cases} \Leftrightarrow F \oplus G \oplus H = \mathbb{R}^4$

Exercice 0.5 Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit : $F = \text{Vect}(1+X)$, $G = \text{Vect}(X + X^2)$ et $H = \text{Vect}(1 - X^2)$

1. Donner la dimension de chacun de sous-espace vectoriel.

   Chacun des sev est engendré par un vecteur non nul donc ils sont tous de dimension 1

2. Vérifier que $F \cap G = \{0\}$. Que vaut $F \cap G \cap H$? On admettra que $G \cap H = \{0\}$ et $F \cap G = \{0\}$

   $P \in F \cap G \Leftrightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ P = \alpha(1+X) = \beta(X+X^2) \Rightarrow \alpha + (\alpha-\beta)X - \beta X^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

   Ainsi : $P \in F \cap G \Rightarrow P = 0$ soit $F \cap G = \{0\}$

   Dés lors, puisque $F \cap G \cap H \subset F \cap G$ et que $F \cap G \cap H$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$, on a aussi $F \cap G \cap H = \{0\}$

3. En remarquant que $(1+X) - (X+X^2) = 1 - X^2$, en déduire que la somme $F + G + H$ n'est pas directe.

   On a : $0 = (1+X) - (X+X^2) - (1-X^2)$ où $1 + X \in F$, $-(X+X^2) \in G$ et $-(1-X^) \in H$

   Aussi, 0 admet un décomposition dans $F+G+H$ qui n'est pas triviale aussi la somme $F+G+H$ n'est pas directe.

4. Donner une famille base de $F + G + H$ et en déduire sa dimension.

   On connaît une base des espaces F, G et H aussi la famille $\left(1+X, X+X^2, 1-X^2)\right)$ est génératrice de $F + G + H$.

   On sait aussi qu'elle n'est pas libre car $1 - X^2 = (1+X) - (X+X^)$ aussi :

   $F + G + H = \text{Vect}(1+X, X+X^2, 1-X^2) = Ve(1+X, X+X^2)$ et ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\dim(F+G+H) = 2$ et $(1+X, X+X^2)$ est une base de $F + G + H$

$\boxed{\text{Exercice 0.75}}$ Dans $M_3(\mathbb{R})$, on considère :

D le sous-espace vectoriel des matrices diagonales

T le sous espace vectoriel des matrice triangulaire supérieures (matrice avec des coefficients non nuls au dessus ou sur la diagonale)

S le sous-espace vectoriel des matrices triangulaire supérieures strictes (matrice avec des coefficients non nul uniquement strictement au dessus de la diagonale)

I le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires inférieures strictes(matrice avec des coefficients non nul uniquement strictement en dessus de la diagonale)

1. En utilisant des sous-familles de la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$, donner des bases des espaces D, T, S et I.
   En déduire leurs dimensions.

On notera $\mathscr{B} = (E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ où E_{ij} est la matrice carrée d'ordre 3 qui a tous ses coefficients nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.

$D = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}\right)$ et la famille $\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}\right)$ génératrice est aussi libre car c'est une sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}$ aussi c'est une base de D et : $\boxed{\dim D = 3}$

$T = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \mid (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6\right\} = \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}\right)$ et la famille génératrice obtenue est aussi libre car c'est un sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}$. on dispose donc d'une base de T et : $\boxed{\dim T = 6}$

$S = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(E_{12}, E_{13}, E_{23}\right)$ et la famille génératrice obtenue est aussi libre car c'est un sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}$. on dispose donc d'une base de S et : $\boxed{\dim S = 3}$

$I = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(E_{21}, E_{31}, E_{32}\right)$ et la famille génératrice obtenue est aussi libre car c'est un sous-famille de la famille libre $\mathscr{B}$. on dispose donc d'une base de I et : $\boxed{\dim I = 3}$

2. La somme $D + T + S$ est-elle être directe ? On pourra utiliser les dimensions.

Supposons que cette somme soit directe, on aurait alors $\dim(D \oplus T \oplus S) = \dim D + \dim T + \dim S = 3 + 6 + 3 = 12 > 9 = \dim M_3(\mathbb{R})$ ce qui est absurde puisque $D + T + S$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Par l'absurde, on a obtenu que $\boxed{\text{la somme } D + T + S \text{ n'est pas directe}}$.

3. Vérifier que $D + S + I$ est directe.

On vérifie que la matrice nulle admet une unique décomposition dans $D + S + I$ qui est triviale.
Si $O = A + B + C$ où $A \in D$, $B \in S$ et $C \in I$ alors : $\exists(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^9$ avec :

$$O = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}}_{=A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{pmatrix}}_{=C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Mais, une matrice est nulle si ces coefficients le sont donc : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$
Ainsi, on a bien obtenu que : $A = 0, \quad B = 0$ et $C = 0$

4. A-t-on $D \oplus S \oplus I = M_3(\mathbb{R})$?

On sait que D, S et I sont des sev en somme directe donc : $\quad D \oplus S \oplus I \subset M_3(\mathbb{R})$
et : $\quad \dim(D \oplus S \oplus I) = \dim D + \dim S + \dim I = 3 + 3 + 3 = 9 = \dim M_3(\mathbb{R})$

Alors : $\left\{\begin{array}{l} D \oplus S \oplus I \subset M_3(\mathbb{R}) \\ \dim(D \oplus S \oplus I) = \dim M_3(\mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{D \oplus S \oplus I = M_3(\mathbb{R})}$