PT : Correction du TD n° 1 sur le chapitre II

EXEMPLE 1 On définit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P(1) & P'(1) \end{pmatrix} \mid P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$$ et G le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que F est un sev de $M_2(\mathbb{R})$ et préciser $\dim F$.

On a : $P \in \mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P = a + bX + cX^2$ avec $P(0) = a$, $P(1) = a+b+c$, $P'(0) = b$ et $P'(1) = b+c$

aussi $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a+b+c & b+2c \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M_3} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Ainsi : $F = \mathrm{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ dans $M_2(\mathbb{R})$ donc F est un sev de $M_2(\mathbb{R})$

De plus : $\forall (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = O_{22} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

La famille (M_1, M_2, M_3) est donc libre et elle engendre F donc c'est une base de F et $\dim F = 3$

2. Rappeler $\dim G$ et expliciter une base de G

On a : $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(M_4)$ où $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{22}$ donc $\dim G = 1$

3. Prouver que F et G sont des supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

Comme $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4 < +\infty$, on a : $F \oplus G = M_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim M_2(\mathbb{R}) \\ F \cap G = \{O_{22}\} \end{cases}$

• On sait déjà : $\dim F + \dim G = 3 + 1 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$

• $M \in F \cap G \Leftrightarrow \exists (a,b,c,\alpha) \in \mathbb{R}^4,\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b+c & b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \alpha \\ a+b+c = -\alpha \\ b+2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \alpha = 0$

Ainsi, on a bien $F \cap G = \{O_{22}\}$

4. Décomposer la matrice I_2 dans cette somme directe.

On cherche (a,b,c,α) dans $\mathbb{R}^4$ avec : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b+c & b+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} a = 1 \\ b+\alpha = 0 \\ a+b+c-\alpha = 0 \\ b+2c = 1 \end{cases}$

Aussi : $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\alpha \\ \alpha = 2 \\ b+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ \alpha = 2 \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$ Finalement : $I_2 = \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P(1) & P'(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ avec $P = 1 - 2X + \frac{3}{2}X^2$

EXEMPLE 2 Dans cet exercice, on assimile le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynômiale $[x \mapsto P(x)]$

1. Démontrer que $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

• On sait que $\mathbb{R}_1[X]$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ puisque $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}\Big([x \mapsto 1], [x \mapsto x]\Big)$
• On vérifie que F est un sev de $\mathbb{R}^R$R : il est inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par construction et il est non vide puisque $[x \mapsto 0]$ est dans F (elle s'annule partout donc aussi en 0 et en 1). Il reste à vérifier la stabilité par combinaison linéaire : soient $(f_1, f_2) \in F^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on vérifie que $\alpha f_1 + f_2$ est dans F :
on sait que $f_1(0) = 0 = f_1(1)$ (puisque $f_1 \in F$) et $f_2(0) = 0 = f_2(1)$ (puisque $f_2 \in F$) de sorte que
$(\alpha f_1 + f_2)(0) = \alpha f_1(0) + f_2(0) = \alpha \times 0 + 0 = 0$ et $(\alpha f_1 + f_2)(1) = \alpha f_1(1) + f_2(1) = \alpha \times 0 + 0 = 0$ et donc $\alpha f_1 + f_2 \in F$
• On vérifie que la somme est directe en prouvant que $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{[x \mapsto 0]\}$:
si $f \in F \cap \mathbb{R}_1[X]$ alors $f(0) = f(1) = 0$ et : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$ mais alors
$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$ et par suite : $f = [x \mapsto 0]$

Ici, l'espace ambiant n'est pas de dimension finie aussi la caractérisation de la supplémentarité à utiliser est celle qui ne fait pas intervenir la dimension : $F \oplus \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{[x \mapsto 0]\}\ (1) \\ F + \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ (2) \end{cases}$
La proposition (1) a déjà été prouvée aussi il reste à prouver (2)
• Puisque F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on a déjà : $F + \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On obtient l'autre inclusion par un raisonnement en Analyse/Synthèse : il s'agit de montrer que $\forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists (f, h) \in F \times H,\ g = f + h$
Autrement dit, toute fonction g de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *est la somme d'une fonction de* F *et d'une fonction de* $\mathbb{R}_1[X]$
L'idée est donc de se donner une fonction $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *(qui est donc la donnée connue) et de construire les fonctions f et h (qui sont donc les inconnues) en respectant les propriétés attendues de f et g*
Dans l'analyse, on suppose l'existence de la solution vérifiée et on cherche des conditions nécessaires qui doivent être vérifiées (et dans l'absolue la détermination complète des inconnues à l'aide de la donnée)
Dans la synthèse, on va vérifier que les conditions nécessaires sont suffisantes pour assurer l'existence de la solution.
Analyse On se donne $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on suppose que : $g = f + h$ où $f \in F$ et $h \in \mathbb{R}_1[X]$
Puisque $f \in F$ alors $f(0) = f(1) = 0$. Puisque $h \in \mathbb{R}_1[X]$ alors $h(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
Mais $g = f + h$ aussi : $\begin{cases} g(0) = 0 + a \times 0 + b = b \\ g(1) = 0 + a \times 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = g(0) \\ a = g(1) - g(0) \end{cases}$ et donc : $h(x) = \Big(g(1) - g(0)\Big)x + g(0)$
La fonction inconnue h est donc totalement explicitée à l'aide de la donnée g
Et alors : $f = g - h$ donc : $f(x) = g(x) - \Big(g(1) - g(0)\Big)x - g(0)$
La fonction inconnue f est donc, elle aussi, totalement explicitée à l'aide de la donnée g
Il n'y a plus d'inconnue à préciser ce qui conclut l'analyse
Synthèse Pour $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on construit f et h comme dans l'analyse à savoir :

$$h(x) = \Big(g(1) - g(0)\Big)x + g(0) \quad \text{et} \quad f(x) = g(x) - h(x) = g(x) - \Big(g(1) - g(0)\Big)x - g(0)$$

Il est clair, par construction , que : $g = f + h$ où $h \in \mathbb{R}_1[X]$ et $f \in F$ puisque :
$f(0) = g(0) - h(0) = h(0) - h(0) = 0$ et $f(1) = g(1) - h(1) = g(1) - \Big(\big(g(1) - g(0)\big) + g(0)\Big) = 0$
Ainsi, on a bien obtenu que : $\forall g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ g = f + h \in F + \mathbb{R}_1[X]$ soit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset F + \mathbb{R}_1[X]$
• Par double inclusion, on a obtenu (2) et donc : $\begin{cases} F \cap \mathbb{R}_1[X] = \{[x \mapsto 0]\}\ (1) \\ F + \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{F \oplus \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

2. Décomposer la fonction exp dans cette somme directe.

Il suffit de reprendre la décomposition construite dans l'analyse avec $g = \exp$
On a : $h(x) = (e^1 - e^0)x + e^0 = (e - 1)x + 1$ et $f(x) = g(x) - h(x) = e^x - (e - 1)x - 1$
Alors : $h \in \mathbb{R}_1[X]$, $f \in F$ et : $\exp = f + h$ est la décomposition dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$