PT : Rappels de géométrie dans l'espace à travers l'exemple n° 1du chapitre XIII

EXEMPLE 1 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère :

— la droite $\mathcal{D}$ qui passe par $A(3,2,1)$ et qui est dirigée par $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}$

— la droite $\mathcal{D}'$ d'équations $\mathcal{D}':\begin{cases}2x+z=2\\ y=1\end{cases}$

— le plan $\mathcal{Q}$ d'équation $x+y+z=1$

— le plan $\mathcal{P}_m :\ mx-y+(2-m)z+m=4$ où m est un paramètre réel.

— S est la surface d'équation $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$

On écrit les vecteurs de la même façon que le sujet. Globalement, on doit toujours respecter et s'adapter aux notations du sujet.

Caractérisation des plans dans l'espace : On peut représenter un plan

– soit à l'aide d'une représentation cartésienne $\mathcal{P}:\ ax+by+cz+d=0$ où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ permettant d'obtenir un vecteur normal $\vec{n}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$ et un point $A(x_A,y_A,z_A)$ dont les coordonnées vérifient l'équation.

– soit à l'aide d'une représentation paramétrique $\mathcal{P}:\begin{cases}x=x_A+t\alpha+s\alpha'\\ y=y_A+t\beta+s\beta'\\ z=z_A+t\gamma+s\gamma'\end{cases},(t,s)\in\mathbb{R}^2$ conduisant à une représentation géométrique

$\mathcal{P}=A+\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ où $A(x_A,y_A,z_A)$ est un point de $\mathcal{P}$ et $(\vec{u},\vec{v})$ un base de vecteurs directeurs avec $\begin{cases}\vec{u}=\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}+\gamma\vec{k}\\ \vec{v}=\alpha'\vec{\imath}+\beta'\vec{\jmath}+\gamma'\vec{k}\end{cases}$

Caractérisation des droites dans l'espace : On peut représenter une droite

– soit à l'aide d'une représentation cartésienne où la droite est donnée comme intersection de deux plans non parallèles $\mathcal{D}=\Pi_1\cap\Pi_2:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ où $\begin{cases}\Pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ \Pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\end{cases}$ sont non parallèles car de vecteurs normaux $\vec{n}_1=a_1\vec{\imath}+b_1\vec{\jmath}+c_1\vec{k}$ et $\vec{n}_2=a_2\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+c_2\vec{k}$ non colinéaires ($\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2\neq\vec{0}$). **Attention!** Le couple (Π_1,Π_2) est loin d'être unique!

– soit à l'aide d'une représentation paramétrique $\mathcal{P}:\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\ y=y_A+t\beta\\ z=z_A+t\gamma\end{cases},t\in\mathbb{R}$ conduisant à une représentation géométrique

$\mathcal{D}=A+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ où $A(x_A,y_A,z_A)$ est un point de $\mathcal{D}$ et $\vec{u}$ un vecteur directeur avec $\vec{u}=\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}+\gamma\vec{k}$. Si on connaît une représentation cartésienne de $\mathcal{D}$, alors $\vec{u}=\vec{n}_1\wedge\vec{n}_2$ est directeur et on obtient A en fixant l'une des coordonnées dans le système des deux équations de plans. On peut aussi, bien souvent, obtenir une représentation paramétrique directement en utilisant l'une des coordonnées en paramètre (voir correction).

1. (a) Donner un point A' et un vecteur directeur $\vec{u}'$ de la droite $\mathcal{D}'$.

Avec $x=t$ pour paramètre : $\mathcal{D}':\begin{cases}x=t\\ y=1\\ z=2-2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ d'où $\boxed{\mathcal{D}'=A'+\mathrm{Vect}(\vec{u}')\text{ où }A'(0,1,2)\text{ et }\vec{u}'=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}}$

(b) Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles coplanaires?

Des droites $A+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $A'+\mathrm{Vect}(\vec{u}')$ sont coplanaires si elles sont situées dans un même plan ce qui impose que $(\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}')$ soient liées ce qu'on peut vérifier avec un déterminant.

$$\det(\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}')=\begin{vmatrix}-3&1&1\\-1&-1&0\\1&3&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&1&1\\-1&-1&0\\-5&5&0\end{vmatrix}_{L_3\leftarrow L_3+2L_1}=+1\times(-1\times5-(-5)\times(-1))=-10\neq0$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}\text{ et }\mathcal{D}'\text{ ne sont pas coplanaires}}$

(c) On pose $\vec{u}''=\vec{u}\wedge\vec{u}'$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ issue de A' dirigée par $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$.

$\vec{u}''=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{P}$ est donc normal $\vec{u}'\wedge\vec{u}''=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-5\\5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

soit : $\mathcal{P}:\ 2x-y+z+d=0$ et $A'\in\mathcal{P}\Leftrightarrow 2\times0-1\times1+1\times2+d=0\Leftrightarrow d=-1$ d'où $\boxed{\mathcal{P}:\ 2x-y+z-1=0}$

(d) Déterminer le point A'' d'intersection de $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$

On utilise une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ qu'on injecte dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Or : $\mathcal{D}=A+\mathrm{Vect}(\vec{u}):\begin{cases}x=3+t\\ y=2-t\\ z=1+3t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ aussi $\boxed{A''\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3};-1\right)}$ car

$A''\in\mathcal{D}\cap\mathcal{P}\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},\ A''(3+t,2-t,1+3t)$ avec $2(3+t)-(2-t)+(1+3t)-1=0\Leftrightarrow6t=-4\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$

(e) Vérifier que la droite $\mathcal{D}''=A''+\mathrm{Vect}(\vec{u}'')$ est une perpendiculaire commune aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

Des droites sont perpendiculaires si elles sont orthogonale et sécantes ie orthogonale et coplanaire.

On vérifie facilement que : $\vec{u}.\vec{u}''=0=\vec{u}'.\vec{u}''$ donc $\mathcal{D}''$ est bien orthogonale à la fois à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$ (i)

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont sécantes en A'' (ii) : elles sont donc coplanaires.

De plus, par construction, le plan $\mathcal{P}$ contient $\mathcal{D}'$ (il contient A' et $\vec{u}'$ est un vecteur directeur) et aussi $\mathcal{D}''$ (il contient A'' et $\vec{u}''$ est un vecteur directeur) donc les droites $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont coplanaires (iii) (incluses dans $\mathcal{P}$).

Avec $(i),(ii)$ et (iii), on a prouvé : $\boxed{\mathcal{D}''=A''+\mathrm{Vect}(\vec{u}'')\text{ est une perpendiculaire commune à }\mathcal{D}\text{ et }\mathcal{D}'}$

Pour deux droites $\mathcal{D}=A+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\mathcal{D}'=A'+\mathrm{Vect}(\vec{u}')$ de l'espace, on distingue

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales lorsque $\vec{u}.\vec{u}'=0$

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires lorsqu'elles sont orthogonales et sécantes(ce qui revient à vérifier qu'elles sont coplanaires : $\det(\overrightarrow{AA'},\vec{u},\vec{u}')=0$)

2. (a) Justifier que l'équation définissant $\mathcal{P}_m$ définit bien toujours un plan et que l'intersection $\Delta_m=\mathcal{P}_m\cap\mathcal{Q}$ définie une droite pour toutes les valeur de m.

Pour la définition de $\mathcal{P}_m$, il s'agit de vérifier que $(m,-1,2-m)\neq(0,0,0)$ ce qui est vérifié puisque $-1\neq0$

Pour la définition de Δ_m, il s'agit de vérifier que les plans sont non parallèles

soit que $\begin{pmatrix}m\\-1\\2-m\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m-3\\2-2m\\m+1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ ce qui est vrai car $\begin{cases}m-3=0\\ m+1=0\end{cases}$ n'a pas de solution.

(b) Préciser un vecteur normal $\vec{n}_m$ de $\mathcal{P}_m$ et un vecteur directeur $\vec{u}_m$ de Δ_m

Le plan $\mathcal{P}_m$ est normal à $\boxed{\vec{n}_m=\begin{pmatrix}m\\-1\\2-m\end{pmatrix}}$ et le plan $\mathcal{Q}$ est normal à $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

La droite Δ_m est alors dirigée par $\vec{u}_m=\vec{n}_m\wedge\vec{n}=\boxed{\begin{pmatrix}m-3\\2-2m\\m+1\end{pmatrix}=\vec{u}_m}$

(c) Démontrer qu'il y a une droite Δ fixe (càd qui ne dépend pas de m) qui est incluse dans tous les plans $\mathcal{P}_m$

On remarque que : $B(1,0,2)\in\mathcal{P}_m$ puisque $m\times1-0+(2-m)\times2+m=4$ et si $\vec{v}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}+\vec{k}$ alors $\vec{v}.\vec{n}_m=m-2+2-m=0$ aussi $\boxed{B+\mathrm{Vect}(\vec{v})\text{ est une droite fixe incluse dans tous les plans }\mathcal{P}_m}$

(d) Prouver que les droites Δ_m sont toutes sécantes en un point fixe C

On cherche C à l'intersection de deux droites (par exemple Δ_0 et Δ_1) puis on vérifie qu'il est sur toutes les droites Δ_m

$\Delta_0:\begin{cases}x+y+z=1\\ -y+2z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+4-2z-z=5-3z\\ y=-4+2z\\ z=z\end{cases}$ aussi $\Delta_0=A_0+\mathrm{Vect}(\vec{u}_0)$ où $A_0(1,-4,0)$

Ainsi : $\exists t\in\mathbb{R},\ C(5-3t,-4+2t,t)$ et $C\in\Delta_1\Leftrightarrow\begin{cases}5-3t+(-4+2t)+t=1\\ (5-3t)-(-4+2t)+t+1=4\end{cases}\Leftrightarrow6-4t=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$

de sorte que : $\boxed{C\left(\frac{1}{2},-1;\frac{3}{2}\right)}$ On vérifie que : $\forall m\in\mathbb{R},\ m\times\frac{1}{2}-(-1)+(2-m)\times\frac{3}{2}+m=4$

3. (a) Démontrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

S : $(x-1)^2-1+y^2+(z+1)^2-1-2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=2^2$ donc $\boxed{\text{S est la sphère de centre } \Omega(1,0,-1) \text{ et de rayon } \mathrm{R}=2}$

(b) Préciser la nature de l'intersection de S et du plan $\mathscr{Q}$.

On compare ΩH à R où H est le projeté orthogonale de Ω sur $\mathscr{Q}$. Celui-ci est situé sur la droite $\Omega+\text{Vect}(\vec{n})$ donc $\mathrm{H}(1+t,t,-1+t)$ avec $t\in\mathbb{R}$ et aussi $\mathrm{H}\in\mathscr{Q} \Leftrightarrow 1+t+t+(-1+t)=1 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$. Alors : $\Omega\mathrm{H}=\sqrt{3t^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<2$

Ainsi, $\mathrm{S}\cap\mathscr{Q}$ est un cercle de centre H situé dans le plan $\mathscr{Q}$ et de rayon $r=\sqrt{2^2-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{11}{3}}$

Un cercle de l'espace est caractérisé par trois éléments : un centre I, un rayon r et le plan $\mathscr{P}$ du cercle (ou l'axe $\mathrm{I}+\text{Vect}(\vec{n})$ de cercle avec $\vec{n}$ normal au plan $\mathscr{P}$ qui contient le cercle)

Projection orthogonale sur un plan : Pour obtenir le projeté orthogonal d'un point $\mathrm{M}(x_\mathrm{M},y_\mathrm{M},z_\mathrm{M})$ sur un plan $\mathscr{P}$: $ax+by+cz+d=0$, on cherche H à l'intersection de $\mathscr{P}$ et de la normale Δ au plan $\mathscr{P}$ issue de M soit $\Delta=\mathrm{M}+\text{Vect}(\vec{n})$ avec $\vec{n}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$. Aussi : $\exists t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{H}(x_\mathrm{M}+at,y_\mathrm{M}+bt,z_\mathrm{M}+ct)$ et on détermine t puisque les coordonnées de H vérifient l'équation $ax+by+cz+d=0$

Projection orthogonale sur une droite : Pour obtenir le projeté orthogonal d'un point $\mathrm{M}(x_\mathrm{M},y_\mathrm{M},z_\mathrm{M})$ sur une droite $\mathscr{D}=\mathrm{A}+\text{Vect}(\vec{u})$, on cherche H à l'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan Π perpendiculaire à $\mathscr{D}$ (donc normal à $\vec{u}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$) qui passe par M. Aussi : $\exists t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{H}(x_\mathrm{A}+at,y_\mathrm{M}+bt,z_\mathrm{M}+ct)$ et on détermine t puisque les coordonnées de Π vérifient l'équation $a(x-x_\mathrm{M})+b(y-y_\mathrm{M})+c(z-z_\mathrm{M})=0$

Intersection plan/sphère : on appelle H le projeté orthogonal sur le plan $\mathscr{P}$ du centre Ω de la sphère $\mathscr{S}$ de rayon R. Il y a alors trois possibilités :

- si $d(\Omega,\mathscr{P})=\Omega\mathrm{H}>\mathrm{R}$ alors le plan et la sphère ne se rencontre pas : $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}=\emptyset$
- si $d(\Omega,\mathscr{P})=\Omega\mathrm{H}=\mathrm{R}$ alors le plan et la sphère ne se rencontre qu'en H : $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}=\{\mathrm{H}\}$ et $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère $\mathscr{S}$
- si $d(\Omega,\mathscr{P})=\Omega\mathrm{H}<\mathrm{R}$ alors le plan et la sphère ne se rencontre selon un cercle de centre H, situé dans le plan $\mathscr{P}$, d'axe $(\Omega\mathrm{H})$ et de rayon $r=\sqrt{\mathrm{R}^2-\Omega\mathrm{H}^2}$ (théorème de Pythagore dans le triangle ΩHA rectangle en H où A est un point quelconque du cercle soit $\Omega\mathrm{A}=\mathrm{R}$)

Intersection droite/sphère : on appelle H le projeté orthogonal sur la droite $\mathscr{D}$ du centre Ω de la sphère $\mathscr{S}$ de rayon R. Il y a alors trois possibilités :

- si $d(\Omega,\mathscr{D})=\Omega\mathrm{H}>\mathrm{R}$ alors la droite et la sphère ne se rencontre pas : $\mathscr{S}\cap\mathscr{D}=\emptyset$
- si $d(\Omega,\mathscr{D})=\Omega\mathrm{H}=\mathrm{R}$ alors la droite et la sphère ne se rencontre qu'en H : $\mathscr{S}\cap\mathscr{D}=\{\mathrm{H}\}$ et $\mathscr{D}$ est tangente à la sphère $\mathscr{S}$
- si $d(\Omega,\mathscr{P})=\Omega\mathrm{H}<\mathrm{R}$ alors la droite et la sphère se rencontre en deux points A et B, avec H milieu de [AB].

Intersection sphère/sphère :

Soit deux sphères $\begin{cases} \mathscr{S}_1 : (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\mathrm{R}_1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d_1=0 \\ \mathscr{S}_2 : (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=\mathrm{R}_2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2a_2x+2b_2y+2c_2z+d_2=0 \end{cases}$

On ramène l'étude de l'intersection $\mathscr{S}_1\cap\mathscr{S}_2$ des deux sphères à celle d'une sphère et d'un plan car :

$$\mathrm{M}(x,y,z)\in\mathscr{S}_1\cap\mathscr{S}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d_1=0 \\ x^2+y^2+z^2+2a_2x+2b_2y+2c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

$$\underset{\mathrm{L}_2\leftarrow\mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\mathrm{R}_1^2 & \text{équation de la sphère } \mathscr{S}_1 \\ (a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y+(c_2-c_1)z+(d_2-d_1)=0 & \text{équation d'un plan } \Pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{M}(x,y,z)\in\mathscr{S}_1\cap\Pi$$