PT : Correction du TD n° 1 sur le chapitre XI (Réduction de matrice symétrique)

EXEMPLE N° 3 Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} P$ soit diagonale.

• La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc le théorème spectral assure l'existence de la matrice P:
A est diagonalisable avec matrice de passage orthogonale (càd il y a une base de diagonalisation qui est une BON)

soit $\exists P \in O_3(\mathbb{R})$, P^TAP est diagonale

avec $P = P_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}_{diag}}$, matrice de passage entre la base canonique et la base orthonormée de diagonalisation (et $P^T = P^{-1}$ puisque P est une matrice orthogonale)

• On commence donc par rechercher les valeurs propres:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & 1 & -2 \\ 1 & x-5 & -2 \\ -2 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-6 & 1 & -2 \\ 6-x & x-5 & -2 \\ 0 & -2 & x-2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} (x-6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & x-5 & -2 \\ 0 & -2 & x-2 \end{vmatrix} = (x-6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & x-4 & -4 \\ 0 & -2 & x-2 \end{vmatrix}_{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}$$

Ainsi: $\chi_A(x) = (x-6)(x^2-6x) = x(x-6)^2$.

• Notons $E_0 = \text{Ker}(A)$ et $E_6 = \text{Ker}(A - 6I_3)$ les sev propres, on sait que $E_0 \oplus E_{-6} = \mathbb{R}^3$ (car A diagonalisable) et qu'ils sont orthogonaux donc $E_6 = E_0^{\perp}$.
On détermine d'abord E_0 qui est de dimension 1 (car vp simple) et on en déduit $E_6 = E_0^{\perp}$.

$$E_0 = \text{Ker} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Vect}\big((1,1,-2)\big) \text{ puisque } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E_6 est le plan vectoriel normal à $u = (1,1,-2)$, c'est à dire le plan d'équation $x + y - 2z = 0$.
• Il reste à choisir une base orthonormée adaptée à $E_0 \oplus E_6 = \mathbb{R}^3$ pour obtenir une BON de diagonalisation:
$\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ est unitaire et dirige E_0

$\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ est unitaire et c'est un vecteur du plan E_6 puisqu'il vérifie l'équation $1 + (-1) - 2 \times 0 = 0$

Enfin, le vecteur $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1-1)$ complète la base orthonormée de diagonalisation

Alors: $P = \text{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -2 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ convient.

EXERCICE N° 0 Trouver une matrice P orthogonale telle que P^TAP est diagonale lorsque :

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

• La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale :

$\exists P \in O_2(\mathbb{R})$, P^TAP est diagonale

P est la matrice de passage entre la base canonique $\mathscr{B}_{can}$ de $\mathbb{R}^2$ et la base orthonormée $\mathscr{B}_{diag} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ de diagonalisation.
• Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$
• Comme A est symétrique réelle, on sait que $E_{-1} \oplus E_3 = \mathbb{R}^2$ et que $E_3 = E_{-1}^{\perp}$ où $\begin{cases} E_{-1} = \text{Ker}(A + I_2) \\ E_3 = \text{Ker}(A - 3I_2) \end{cases}$

$E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ est de dimension 1 (vp simple) et $u = (1,-1) \in E_{-1}$ aussi $E_{-1} = \text{Vect}(u)$

Alors $v = (1,1)$ dirige E_3 ($v = (-b,a)$ est orthogonal à $u = (a,b)$) puisque $E_3 = E_{-1}^{\perp}$ soit $E_3 = \text{Vect}(v)$

• La base $\mathscr{B}_{diag} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}\right)$ est alors une BON de diagonalisation et : $P = P_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}_{diag}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

• $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

• La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale :

$\exists P \in O_3(\mathbb{R})$, P^TAP est diagonale

P est la matrice de passage entre la base canonique $\mathscr{B}_{can}$ de $\mathbb{R}^3$ et la base orthonormée $\mathscr{B}_{diag} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_2)$ de diagonalisation.
• Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x+1 & -1 & -1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} (x-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix}$$

Aussi, en développant selon L_3 : $\chi_A(x) = (x-1)(x+2)\big(1 \times (x+1) - 1 \times (-1)\big) = (x-1)(x+2)^2$
• On note $E_1 = \text{Ker}(A - I_3)$ et $E_{-2} = \text{Ker}(A + 2I_3)$ les sev propres, on sait que :
$E_1 \oplus E_{-2} = \mathbb{R}^3$ (car A est diagonalisable) et $E_{-2} = E_1^{\perp}$ (car A symétrique) et $\dim E_1 = 1$ (valeur propre simple)

$E_1 = \text{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ aussi $u = (1,1,1) \in E_1$ (somme des colonnes nulles) d'où, puisque $\dim E_1 = 1$: $E_1 = \text{Vect}(u)$

$E_{-2} = E_1^{\perp}$ est donc le plan d'équation $x + y + z = 0$
• On construit alors la base orthonormée $\mathscr{B}_{diag} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ de diagonalisation :

$\varepsilon_1 = \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ $v = (1,-1,0) \in E_{-2}$ vu que $1 + (-1) + 0 = 0$ aussi $\varepsilon_2 = \dfrac{v}{\|v\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Alors : $P = P_{\mathscr{B}_{can},\mathscr{B}_{diag}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$

EXERCICE N° 2 Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

la matrice est symétrique réelle : cela assure qu'elle est diagonalisation avec une matrice de passage orthonormée.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ 0 & -2 & x-2 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} (x-4) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & -2 & x-2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (x-4) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & x+2 & -2 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

Ainsi, le déterminant étant triangulaire : $\chi_A(x) = (x-4)(x+2)(x-2)$ d'où $\text{Sp}(A) = \{-2,2,4\}$
Tous les sev propres de A sont de dimension 1.

$E_2(A) = \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ aussi $u = (1,0,-1) \in E_2(A)$ (car les colonnes 1 et 3 sont opposées)

$E_{-2}(A) = \text{Ker}(A + 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ aussi $v = (1,-2,1) \in E_{-2}(A)$ (car les colonnes de la matrice vérifie $C_1 - 2C_2 + C_3 = 0$)

$$w = u \wedge v = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{vmatrix} \in \big(E_2(A) \oplus E_{-2}(A)\big)^{\perp} = E_4(A)$$

La base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$ et $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,-1)$ est une base orthonormée directe de diagonalisation. Alors : $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$ (et même $SO_3(\mathbb{R})$) avec $P^TAP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$