PT : Correction du TD n° 1 sur le chapitre X

EXERCICE N° 1 Déterminer le rayon de convergence R des séries entières

1. $\displaystyle\binom{3n}{n} z^{3n}$

On pose $u_n = \displaystyle\binom{3n}{n} z^{3n} = \frac{(3n)!}{(2n)!n!} z^{3n}$ Attention ! Bien écrire $(3n)!$ et pas $3n!$ qui peut se lire aussi $3\times(n!)$...

On utilise la règle de d'Alembert. Pour $z \neq 0$:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(3n+3)!}{(n+1)!(2n+2)!} \times \frac{n!(2n)!}{(3n)!} \times \frac{|z|^{2n+2}}{|z|^{2n}} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(2n+2)(2n+1)}|z|^2 \sim \frac{27n^3}{4n^2}|z|^2 \sim \frac{27}{4}|z|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{27}{4}|z|^2$$

Rappel : $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$ donc $(n+1)! = n!\times(n+1)$, $(2n+2)! = (2n)!\times(2n+1)(2n+2)$, etc...

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \frac{27}{4}|z|^3 < 1 \Leftrightarrow |z|^3 < \frac{4}{27} \Leftrightarrow |z| < \frac{4^{\frac13}}{3}, \text{ la série CVA et donc } R \geqslant \frac{4^{\frac13}}{3} \\ \text{Si } \frac{27}{4}|z|^3 > 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{4^{\frac13}}{3}, \text{ la série DVG donc } R \leqslant \frac{4^{\frac13}}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R = \frac{4^{\frac13}}{3}}$$

2. $\displaystyle\sum \frac{z^{2n+1}}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$

On pose $u_n = \dfrac{z^{2n+1}}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$ et on utilise la règle de d'Alembert. Pour $z \neq 0$:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{e^{\sqrt{n}\ln\sqrt{n}}}{e^{\sqrt{n+1}\ln\sqrt{n+1}}} \times \frac{|z|^{2n+3}}{|z|^{2n+1}} = \exp\left(\tfrac12\left(\sqrt{n}\ln n - \sqrt{n+1}\ln(n+1)\right)\right)\times|z|^2$$ Rappel : $\ln x^\alpha = \alpha\ln x$

Pour calculer cette limite, on recherche un équivalent de l'expression dans l'exponentielle à l'aide de DL :

$$\sqrt{n+1}\ln(n+1) = \sqrt{n}\left(1+\frac1n\right)^{\frac12}\left(\ln n + \ln\left(1+\frac1n\right)\right) = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac1n\right)\right)\left(\ln n + \frac1n + o\left(\frac1n\right)\right)$$

Aussi : $$\sqrt{n+1}\ln(n+1) = \sqrt{n}\left(\ln n + \frac1n + o\left(\frac1n\right) + \frac{\ln n}{2n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

En factorisant, on fait apparaître les DL usuels $\begin{cases}(1+u)^\alpha = 1+\alpha u + o(u)\\ \ln(1+u) = u + o(u)\end{cases}$ avec $u = \dfrac1n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Or : $\dfrac{1}{2n^2}$ et les $o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ sont négligeables devant $o\left(\dfrac1n\right)$

Ainsi : $$\sqrt{n+1}\ln(n+1) = \sqrt{n}\left(\ln n + \frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + o\left(\frac1n\right)\right) = \sqrt{n}\ln n + \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$ et donc

$$\frac12\left(\sqrt{n}\ln n - \sqrt{n+1}\ln(n+1)\right) = -\underbrace{\frac{\ln n}{4\sqrt{n}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} + \underbrace{o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)}_{=\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\times\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\times 0} + \underbrace{o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{=\frac1n\times\tilde{\varepsilon}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\times 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ où $\tilde{\varepsilon}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Finalement, par composition de limites, $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0|z|^2 = |z|^2$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } |z|^2 < 1 \Leftrightarrow |z| < 1, \text{ la série CVA d'où } R \geqslant 1\\ \text{Si } |z|^2 > 1 \Leftrightarrow |z| > 1, \text{ la série DVG d'où } R \leqslant 1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

EXERCICE N° 2 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!}x^n$ et, dans le même genre : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{n!}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!}$

On pose $a_n = \dfrac{n-1}{n!}$ et $u_n = a_n x^n$. Avec la règle de d'Alembert, pour $x \neq 0$:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n-1}|x| = \frac{n}{(n+1)(n-1)}|x| \sim \frac{n}{n^2}|x|^2 = \frac{|x|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$ Aussi, il y a CVA pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\boxed{R = +\infty}$.

Le terme général avec du $n!$ et ce rayon de convergence $R = +\infty$ appelle l'utilisation de $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ pour $x \in \mathbb{R}$

Pour $x \in \mathbb{R}$: $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}\right)x^n =_{(i)} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} =_{(ii)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-1)!} - e^x$$

(i) : La linéarité est possible car on sait que la 1ere et la 3ème somme convergent.

(ii) : $\dfrac{n}{n!}$ vaut 0 si $n=0$ de sorte que la somme peut commencer à $n=1$ et qu'on peut simplifier $\dfrac{n}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$

On pose alors $k = n-1$ dans la somme puis en factorisant par x : $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{k!} - e^x = x\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right) - e^x = xe^x - e^x$

De la même manière, on calcule d'autres sommes à l'aide de l'exponentielle :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} = e^{x^2}$ pour tout x réel

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x\times(-x^2)^n}{n!} = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = xe^{-x^2}$ pour tout x réel

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2+n+1}{2^n}x^n$

On pose $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{2^n}$ et $u_n = a_n x^n$. Avec la règle de d'Alembert, pour $x \neq 0$:

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{2^{n+1}}\times\frac{2^n}{n^2+n+1}\times|x| \sim \frac{n^2}{2n^2}|x| = \frac{|x|}{2}$$

Si $\dfrac{|x|}{2} < 1$, il y a CVA donc $R \geqslant 2$. Si $\dfrac{|x|}{2} > 1$, il y a DVG donc $R \leqslant 2$. Aussi $\boxed{R = 2}$.

Pour le calcul de la somme, le 2^n s'intègre facilement dans la puissance en : $\dfrac{x^n}{2^n} = \left(\dfrac{x}{2}\right)^n$. L'expression polynômiale en n au numérateur s'obtient en appliquant le théorème de dérivation à la série géométrique.

On sait que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ pour $|t| < 1$ Par dérivation terme à terme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = \left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{1}{(1-t)^2} \quad\text{et :}\quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)t^{n-2} = \left(\frac{1}{1-t}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)' = \frac{2}{(1-t)^3} \quad\text{pour } |t|<1$$

Pour optimiser l'utilisation du théorème de dérivation termes à termes, il est judicieux d'écrire $n^2+n+1 = n(n-1)+2\times n+1$ pour faire apparaître les coefficients successifs des dérivées 1, n, $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)$ etc

Pour $|x| < 2$ alors $t = \dfrac{x}{2}$ vérifie $|t| < 1$ et :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(n(n-1)+2\times n+1\right)\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)t^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} nt^n + \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)t^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n + \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$$

par linéarité puisque toutes les sommes convergent et on peut changer les indices de départ des deux premières sommes puisque les premiers termes sont nuls. Dés lors, on peut factoriser par les puissances de t adéquates :

$$S(x) = t^2\times\frac{2}{(1-t)^3} + 2t\times\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1-t} = \left(\frac{x}{2}\right)^2\times\frac{2}{(1-\frac{x}{2})^2} + 2\left(\frac{x}{2}\right)\times\frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2} + \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2}$$

Il est à retenir qu'on peut intégrer les puissances entières dans la puissances de x. Par exemple : $\dfrac{x^n}{3^{2n}} = \left(\dfrac{x}{9}\right)^n$