Exercices

1. Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$

   En $+\infty$: $\operatorname{ch} x \sim \frac{e^x}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\cos x$ est borné donc $\cos x = o(\operatorname{ch} x)$ aussi $f(x) \sim_{+\infty} \operatorname{ch} x \sim_{+\infty} \frac{e^x}{2}$

   En 0 : $\operatorname{ch} x - \cos x = 1 + \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2) \sim_0 x^2$

2. Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $h(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{|1-x|}$

   En 0 : $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 + 1 = 2$ donc $h(x) \sim_0 2$

   En $+\infty$: on a $x > 1$ donc

   $h(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2x} - \left(1 - \frac{1}{2x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. Déterminer un équivalent en $+\infty$ puis en 0 de $h(x) = x^2 + x + \ln(1+\sqrt{x})$

   En 0 : $x^2 + x \sim_0 x$ et $\ln(1+\sqrt{x}) \sim_0 \sqrt{x}$ or $x =_0 o(\sqrt{x})$ donc $x^2 + x = o_0\big(\ln(1+\sqrt{x})\big)$ aussi : $h(x) \sim_0 \ln(1+\sqrt{x}) \sim_0 \sqrt{x}$

   En $+\infty$: $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$, $\ln(1+\sqrt{x}) = \ln\sqrt{x} + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{\sim \frac{1}{\sqrt{x}} = o(\ln\sqrt{x})} \sim \ln\sqrt{x} \sim \frac{\ln x}{2}$

   Par croissance comparée : $\frac{\ln x}{2x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+\sqrt{x}) = o(x^2 + x)$ et : $h(x) \sim_{+\infty} x^2 + x \sim x^2$

1. Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $\quad f(x) = \ln x + (\ln x)^2 + e^x \quad$ et de $\quad g(x) = x\operatorname{Arctan} x - \ln(1+x^2)$

<u>En 0</u> e^x (qui tend vers 1) est négligeable devant $\ln x$ ou $(\ln x)^2$ (qui tendent vers l'infini) et aussi $\ln x = o\big((\ln x)^2\big)$ donc $\boxed{f(x) \sim_0 \ln x}$

$x\operatorname{Arctan} x \sim_0 x^2$ et $\ln(1+x^2) \sim_0 x^2$ donc on utilise des DL pour gagner en précision. Les deux expressions sont paires donc on doit pousser la précision à l'ordre 4 :

$$x\operatorname{Arctan} x = x\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \quad \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Ainsi : $g(x) = \dfrac{x^4}{6} + o(x^4) \Rightarrow \boxed{g(x) \sim_0 \dfrac{x^4}{6}}$

<u>En $+\infty$</u> Par croissance comparée, $\ln x$ et $(\ln x)^2$ sont négligeables devant e^x donc $\boxed{f(x) \sim_{+\infty} e^x}$

Par produit : $x\operatorname{Arctan} x \sim_{+\infty} x \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}x \quad$ et $\quad \ln(1+x^2) = 2\ln x + \underbrace{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}_{=o(\ln x)} \sim_{+\infty} 2\ln x$

Par croissance comparée : $\quad 2\ln x = o\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) \quad$ aussi $\quad \boxed{g(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2}x}$

2. Déterminer les limites suivantes

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{(x^2+\tan x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\ln(1+x^k)} \text{ où } k \in \{2,3,4\} \qquad b)\ \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x\ln x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$$

a) $\tan x \sim_0 x$ donc $x^2 =_0 o(\tan x)$ et : $\quad x^2 + \tan x \sim_0 \tan x \sim_0 x$

$\sqrt{1+x^2} - 1 = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim_0 \dfrac{1}{2} \times x^2$ (changement de variables avec $u = x^2 \to 0$)

$\ln(1+x^k) \sim_0 x^k$ (changement de variables avec $u = x^k \to 0$)

Ainsi : $\dfrac{(x^2+\tan x)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\ln(1+x^k)} \sim_0 \dfrac{x \times \frac{x^2}{2}}{x^k} \sim_0 \dfrac{1}{2}x^{3-k} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } k=2 \\ \frac{1}{2} \text{ si } k=3 \\ 0 \text{ si } k=4 \end{cases}$

b) On pose $\quad x = 1+h \quad$ de sorte que $h \to 0$

Lorsque la limite n'est pas en $a \in \mathbb{R}^*$, on commence par ramener le problème en 0 en posant $x = a+h$

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x\ln x} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}h\right)}{(1+h)\ln(1+h)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}h\right)}{(1+h)\ln(1+h)} \sim_{h\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}h}{1\times h} \sim_{h\to 0} \frac{\pi}{2} \quad \text{donc } \lim_{x\to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x\ln x} = \frac{\pi}{2}$$

c) On écrit : $\quad (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+\sin x)\right)$

Pour une expression où la base et l'exposant bouge en même temps, on repasse en écriture exponentielle.

$\begin{cases} \ln(1+u) \sim_0 u \\ u = \sin x \to 0 \end{cases} \Rightarrow \ln(1+\sin x) \sim_0 \sin x \sim_0 x \quad$ puis $\quad \dfrac{\ln(1+\sin x)}{x} \sim_0 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Par composition de limites, on a alors : $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(1+\sin x)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} e^1 = e$

3. Donner le $DL_4(0)$ de $\ln(\cos x)$

On a : $\quad \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4) \quad$ aussi

$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln\big(1+u(x)\big) \quad$ où $u(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4) \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$

On utilise donc un $DL_2(0)$ de $\ln(1+u)$: $\quad \ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

Le $o(u^2)$ conduit à un $o(x^4)$. Un terme en u^3 sera équivalent à un terme en x^6 donc tombera dans le $o(x^4)$, etc...

On ne garde, dans le développement, que les termes qui ne tombent pas dans le $o(x^4)$:

$$\ln(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o(x^4)$$

soit : $\boxed{f(x) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4)}$

4. Soit la fonction f d'expression $f(x) = \dfrac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$

(a) Justifier que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$

$1-x^2 = (1-x)(1+x) > 0$ sur $]-1,1[$ (car signe de -1 à l'intérieur des racines de ce trinôme du 2nd degré)

$$\left\{\begin{array}{l} [x \mapsto 1-x^2] \text{ est } C^\infty \text{ sur }]-1,1[\\ [x \mapsto \sqrt{x}] \text{ est } C^\infty \text{ sur }]0,+\infty[\\ \forall x \in]-1,1[,\ 1-x^2 \in]0,+\infty[\end{array}\right. \Rightarrow [x \mapsto \sqrt{1-x^2}] \text{ est } C^\infty \text{ sur }]-1,1[\text{ par composition.}$$

De plus : $\sqrt{1-x^2} > 0$ pour $x \in]-1,1[$ donc, par passage à l'inverse, $\left[x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$ est C^∞ sur $]-1,1[$

Enfin, puisque Arcsin est C^∞ sur $]-1,1[$, f est bien C^∞ sur $]-1,1[$ par produit et :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \text{Arcsin}(x) \times -\frac{1}{2} \times (-2x) \times \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\,\text{Arcsin}\, x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

car $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = u(x)^{-\frac{1}{2}}$ de dérivée $-\dfrac{1}{2} \times u'(x) \times u(x)^{-\frac{1}{2}-1}$

(b) Déterminer alors $a :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) + a(x) f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

On a, pour $x \in \times]-1,1[$: $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x}{1-x^2} \times \dfrac{\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1-x^2}}$ puisque $(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = (1-x^2)\sqrt{1-x^2}$

Ainsi : $\boxed{a(x) = -\dfrac{x}{1-x^2} \text{ convient}}$

(c) Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{1-x^2}$ et de $a(x)$

Or : $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u)$ avec $u = x^2 \to 0$ d'où $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)}$

et : $a(x) = -x \times \dfrac{1}{1-x^2} = -x\left(1 + x^2 + o(x^2)\right) = -x - x^3 + o(x^3)$ puis : $\boxed{a(x) = -x - x^3 + o(x^4)}$ par imparité de a

(d) <u>En déduire</u> un développement limité à l'ordre 5 de f en 0

On pourra utiliser une approche par coefficients indéterminés sur le DL de $f'(x)$

On obtient le DL5(0) de $f(x)$ à partir du DL4(0) de $f'(x)$ par intégration :

Si $f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$ alors : $f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + a_0 x + \dfrac{a_1}{2} x^2 + \dfrac{a_2}{3} x^3 + \dfrac{a_3}{4} x^4 + \dfrac{a_4}{5} x^5$

De ce fait, on obtient une expression du DL4(0) de $\dfrac{1}{1-x^2} = f'(x) + a(x) f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) + a(x) f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4) + \left(-x - x^3 + o(x^4)\right)\left(a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_3}{4} x^4 + \frac{a_4}{5} x^5\right) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4) + \left(-a_0 x^2 - \frac{a_1}{2} x^3 - \frac{a_2}{3} x^4 - a_0 x^4 + o(x^4)\right) \\ &= a_0 + a_1 x + (a_2 - a_0) x^2 + \left(a_3 - \tfrac{a_1}{2}\right) x^3 + \left(a_4 - \tfrac{a_2}{3} - a_0\right) x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Or, par unicité du développement limité, on déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 - a_0 = 1 \\ a_3 - \frac{a_1}{2} = 0 \\ a_4 - \frac{a_2}{3} - a_0 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 1 + a_0 = 2 \\ a_3 = \frac{a_1}{2} = 0 \\ a_4 = 1 + \frac{a_2}{3} + a_0 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \end{array}\right. \quad \text{de sorte que : } \boxed{f(x) = x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{8}{15} x^5 + o(x^5)}$$